

# 具有双控制输入通道高阶不确定非线性系统控制设计

张健, 刘允刚\*

山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061

\* 通信作者. E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

收稿日期: 2012-07-10; 接受日期: 2012-10-13

国家自然科学基金 (批准号: 60974003, 61143011, 61273084, 61233014)、山东省自然科学基金 (批准号: JQ200919) 和山东大学自主创新基金 (批准号: 2012JC014) 资助项目

**摘要** 本文研究了一类高阶不确定非线性系统的全局渐近稳定控制设计问题. 不同于现有结果, 本文所研究的高阶非线性系统具有两个控制输入通道, 即控制输入直接作用于两个一维子系统. 这导致已有的控制设计方法不能或难以用来解决该类控制设计问题, 因此, 寻求新的控制设计方法, 用以解决多控制输入通道高阶非线性系统的控制设计问题, 是一个很有意义的研究课题. 本文首先引入一个有效的反馈变换, 从而在非线性系统满足适当假设条件下, 成功地将该类系统的控制设计问题转化为规范的单控制输入通道情况下的控制设计问题. 进而借助于已有结果, 特别是增加幂次积分方法, 给出所研究非线性系统的全局渐近稳定控制器的设计方法. 尽管本文所研究的系统是具有很多控制输入通道高阶非线性系统的特殊情况, 所得结果具有一定的局限性, 但对更一般情况具有借鉴和指导作用. 最后, 仿真算例验证了本文理论结果的有效性.

**关键词** 非线性系统 双控制输入通道 控制设计 增加幂积分 渐近稳定

## 1 引言

在过去的几十年里, 非线性系统的控制设计一直是控制理论的核心研究方向, 得到了系统深入的研究<sup>[1~11]</sup>. 特别是最近, 基于稳定域思想, 发展了“增加幂积分”的控制设计方法<sup>[12]</sup>, 并借助于该方法解决了多类高阶 (不确定) 非线性系统的稳定和跟踪控制设计问题<sup>[13~21]</sup>.

尽管高阶非线性系统控制近几年得到了集中研究, 成果很多, 但是不难看出现有文献所涉及的仍然是有如下特征的系统: 1) 系统在原点处的线性化是不能控和不能观的; 2) 系统的控制输入只直接作用于一个一维子系统, 即系统只有一个控制输入通道. 第一个特征是高阶非线性系统固有的非线性特性. 第二个特征虽能保证控制器能够使用“增加幂积分”的迭代方法显式地构造, 但是也说明所研究的系统具有较强的特殊性, 因为高阶非线性系统也可能有多于一个的控制输入通道, 例如下面三维高

引用格式: 张健, 刘允刚. 具有双控制输入通道高阶不确定非线性系统控制设计. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 670-681, doi: 10.1360/112011-384

阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3^3 + u, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (1)$$

基于文献 [22] 中的定理 2.6(给出了仿射非线性系统反馈等价于单控制输入通道高阶非线性系统的充分必要条件), 易验证即使对很简单的高阶非线性系统 (1)(也是仿射系统), 也不存在与之反馈等价的单控制输入通道高阶非线性系统. 此外, 也不难看出, 现有单控制输入通道高阶非线性系统的控制设计方法不能或难以用于多控制输入通道的情况, 因此, 寻求新的控制设计方法, 用以解决多控制输入通道高阶非线性系统的控制设计问题, 是一个有意义的研究课题.

本文研究一类较系统 (1) 更一般的双控制输入通道高阶不确定性非线性系统的全局渐近稳定控制设计问题. 就作者所知, 目前尚无该类高阶非线性系统控制设计的相关文献. 本文通过引入有效的反馈变换, 在系统非线性满足特定假设条件下, 成功地将该类系统的控制设计问题转化为规范的单控制输入通道情况下的控制设计问题, 进而借助于已有结果, 给出该类系统的全局渐近稳定控制器的设计方法. 尽管本文所研究的系统仅具有两个控制输入通道, 具有一定的局限性和特殊性, 但对更多控制输入通道高阶非线性系统控制设计问题的解决具有借鉴和指导作用.

文末附录中关于“全局有界且收敛到零”和“全局渐近稳定”的讨论, 将在本文关键性引理的证明中涉及到, 另一方面也是为了更全面、更深刻地认识这两个稳定性概念之间的区别与联系. 下文采用如下符号:  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}^n$  分别表示 1 维和  $n$  维实数空间;  $\mathbb{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$  表示集合:  $\{\frac{m_1}{m_2} | m_1 \text{ 和 } m_2 \text{ 是正奇整数, 且 } m_1 \geq m_2\}$ ; 对任意  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_{[k]} = [x_1, \dots, x_k]^T$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

## 2 系统与问题描述

本文研究如下一类具有双控制输入通道高阶不确定非线性系统的全局渐近稳定控制设计问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + f_i(x), & i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} = x_n^{p_{n-1}} + f_{n-1}(x) + u, \\ \dot{x}_n = f_n(x) + u, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  是系统可量测状态, 其初始值为  $x(0) = x_0$ ;  $u \in \mathbb{R}$  是系统控制输入;  $p_i \in \mathbb{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , 称其为系统的 (高) 阶次;  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  是满足  $f_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  的未知非线性连续函数, 称其为系统的不确定非线性项.

本文的主要结果建立在系统 (2) 满足如下假设条件之上:

**假设 1** 存在已知非负光滑函数  $\phi_i(x_{[i]})$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , 使得

$$\begin{cases} |f_i(x)| \leq (|x_{i+1}|^{q_i} + 1)\phi_i(x_{[i]}) \sum_{j=1}^i |x_j|, & i = 1, \dots, n-2, \\ |f_{n-1}(x) - g(x_n)| \leq \phi_{n-1}(x_{[n-1]}) \sum_{j=1}^{n-1} |x_j|, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $g(x_n)$  是已知连续函数且满足  $x_n g(x_n) \geq 0$  或  $|g(x_n)| \leq a(1 + |x_n|^{q_n-1})$ ,  $q_i \in [0, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  和  $a \in [0, +\infty)$  是已知常数.

**假设 2** 非线性函数  $f_n(x)$  满足如下两种情况之一:

(i) 存在已知非负连续函数  $\psi(x_{[n-1]})$  和常数  $\delta \in [0, 1)$ , 使得

$$|f_n(x)| \leq \delta |x_n|^{p_n-1} + (|x_n|^q + 1)\psi(x_{[n-1]}), \quad (3)$$

其中  $q \in [0, p_n-1)$  是已知常数. 此外, 一维系统  $\dot{z} = -z^{p_n-1} - g(z) + f_n(0, \dots, 0, z)$  在原点处是全局渐近稳定的, 其中函数  $g(\cdot)$  和假设 1 中的相同.

(ii) 对任意  $x_{[n-1]} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ , 且一维系统  $\dot{z} = -g(z) + f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$  在原点处是全局渐近稳定的, 其中函数  $g(\cdot)$  和假设 1 中的相同.

假设 1 和 2 分别给出了系统 (2) 不确定非线性项  $f_i, i = 1, \dots, n-1$  和  $f_n$  所满足的限制条件. 不难看出, 假设 1 中关于  $f_i, i = 1, \dots, n-2$  的条件具有一定的一般性, 推广了文献 [13] 中的相应假设条件 (见该文假设 3.2).

假设 2 分两种情况, 给出了  $f_n$  所应满足的限制条件. 其中情况 (i) 主要是对  $f_n$  增长特性的限制. 该情况的一个特例是  $\psi(\cdot)$  满足  $\psi(0) = 0$  且假设 1 中的函数  $g(\cdot)$  满足  $x_n g(x_n) \geq 0$  (例如  $f_n = \frac{1}{2}x_n^{p_n-1}, g = x_n^3$ ). 对该特例, 因为易于验证式 (3) 意味着系统  $\dot{z} = -z^{p_n-1} - g(z) + f_n(0, \dots, 0, z)$  的全局渐近稳定性, 故该特例的情况 (i) 仅需要  $f_n$  满足式 (3) 即可. 情况 (ii) 没有关于  $f_n$  增长特性的限制, 而是要求对任意的  $x_{[n-1]} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , 其中的一维系统在原点处全局渐近稳定. 和情况 (i) 相比, 情况 (ii) 显得较为抽象. 下面举两个具体的例子, 以便进一步加强对假设 2 情况 (i) 和 (ii) 的理解.

**例 1** 系统 (2) 中,  $n = 3, p_1 = p_2 = 3, f_1(x_1) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0, f_3(x_{[3]}) = x_3(x_1^2 - 1) + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_3^3 \sin(x_2)$ .

**例 2** 系统 (2) 中,  $n = 3, p_1 = p_2 = 3, f_1(x_1) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0, f_3(x_{[3]}) = -e^{x_1}x_3^5$ .

对例 1, 易验证  $|f_3(x_{[3]})| \leq \frac{1}{2}|x_3|^3 + (|x_3| + 1)(\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 1)$ , 且一维系统  $\dot{z} = -z^3 + f_3(0, 0, z) = -z^3 - z$  在原点处是全局渐近稳定的, 故该例中函数  $f_3(x_{[3]})$  满足假设 2 情况 (i). 但是由于例 1 中  $f_3(x_1, x_2, 0) \neq 0$ , 且当  $x_1 = 2, x_2 = 0$  时, 系统  $\dot{z} = -z^3 + 3z$  在原点处不是全局渐近稳定的, 故该例中  $f_3(x_{[3]})$  不满足假设 2 情况 (ii). 但是例 1 不是前述假设 2 情况 (i) 的特例. 因为若存在非负连续函数  $\psi(x_{[2]})$  满足  $\psi(0) = 0$  且使得式 (3) 成立, 则当  $x_1 = x_2 = 0$  时, 式 (3) 意味着  $|f_3(x_{[3]})| = |x_3| \leq \delta |x_3|^3, \forall x_3 \in \mathbb{R}$ . 这显然不可能.

对例 2, 因为  $f_3(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ , 且对任意  $x_1 \in \mathbb{R}$ , 系统  $\dot{z} = -e^{x_1}z^5$  是全局渐近稳定的, 故该例中函数  $f_3(x_{[3]})$  满足假设 2 情况 (ii). 由于例 2 中  $f_3(x_{[3]})$  关于  $x_3$  的幂次是 5 (大于  $p_2 = 3$ ), 故该例中  $f_3(x_{[3]})$  不满足假设 2 情况 (i).

从系统 (2) 的结构看, 该系统可分为两部分:  $n-1$  维子系统  $x_{[n-1]}$  和一维子系统  $x_n$ . 显然, 前  $n-1$  维子系统具有常见高阶非线性系统的一般形式, 且由文献 [13,18] 知, 基于假设 1 能够构造出该子系统的全局渐近稳定控制器, 但该控制器却不能确保第二个子系统的全局渐近稳定性 (即使  $f_n$  满足类似于假设 1 的增长限制条件). 因此, 对子系统  $x_n$ , 其非线性函数  $f_n$  应满足更为特殊的假设条件, 方能设计整个系统的全局渐近稳定控制器. 须指出的是, 对本文所研究的控制问题来说, 假设 2 所界定的非线性函数  $f_n$  未必是必要的, 但却是本文方法可行性的基本保证.

更确切地, 本文的控制目标是设计连续控制器, 使得闭环系统的解在原点处全局渐近稳定.

### 3 全局渐近稳定控制设计

由于本文研究的是双控制输入通道高阶非线性系统的全局渐近稳定控制设计问题, 所以设定系统

(2) 的维数  $n$  大于或等于 2.

首先为系统 (2) 设计如下形式的反馈变换:

$$u = -x_n^{p_n-1} - g(x_n) + v(x_{[n-1]}), \quad (4)$$

其中  $v(x_{[n-1]})$  是待定的连续函数且满足  $v(0) = 0$ . 如此, 系统 (2) 变为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}^{p_i} + f_i(x), & i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} = \bar{f}_{n-1}(x) + v(x_{[n-1]}), \\ \dot{x}_n = -x_n^{p_n-1} - g(x_n) + f_n(x) + v(x_{[n-1]}), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\bar{f}_{n-1}(x) = f_{n-1}(x) - g(x_n)$ . 显然, 若选择适当的  $v(\cdot)$  使得系统 (5) 全局渐近稳定, 则由式 (4) 可得到系统 (2) 的全局渐近稳定控制器. 下面引理给出系统 (5) 全局渐近稳定的充分条件, 是后文设计控制器的基础.

**引理 1** 若满足假设 2 的系统 (5) 的子系统  $x_{[n-1]}$  是全局渐近稳定的, 则系统 (5) 是全局渐近稳定的.

由于  $f_n$  满足假设 2 的两种情况之一, 故该引理的证明分两种情况进行. 在给出其严格证明前, 先讨论前面述及的假设 2 情况 (i) 的一种特殊情况, 即式 (3) 中的  $\psi(0) = 0$  且假设 1 中的函数  $g(\cdot)$  满足  $x_n g(x_n) \geq 0$ .

定义  $V_n(t) = \frac{1}{2}x_n^2$ . 则沿着系统 (5) 的解, 利用 Young 不等式<sup>1)</sup>, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(t) &= x_n(-x_n^{p_n-1} - g(x_n) + f_n(x) + v(x_{[n-1]})) \\ &\leq -(1-\delta)x_n^{p_n-1+1} + |x_n|(|x_n|^q + 1)\psi(x_{[n-1]}) + |x_n| \cdot |v(x_{[n-1]})| \\ &\leq -\frac{1-\delta}{2}x_n^{p_n-1+1} + \bar{\psi}(x_{[n-1]}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\bar{\psi} = \left(\frac{4}{(1-\delta)(p_n-1+1)}\right)^{\frac{1}{p_n-1}} (\psi + |v|)^{\frac{p_n-1+1}{p_n-1}} + \left(\frac{4q+4}{(1-\delta)(p_n-1+1)}\right)^{\frac{q+1}{p_n-1-q}} \psi^{\frac{p_n-1+1}{p_n-1-q}}$  是非负连续函数.

由于  $\psi(0) = v(0) = 0$ , 故  $\bar{\psi}(0) = 0$ , 从而由文献 [4] 中的引理 4.3 知, 存在  $\mathcal{K}_\infty$  函数<sup>2)</sup> $\gamma(\cdot)$  使得  $\bar{\psi}(x_{[n-1]}) \leq \gamma(\|x_{[n-1]}\|)$ . 由此及式 (6), 当  $|x_n| \geq \left(\frac{4}{1-\delta}\gamma(\|x_{[n-1]}\|)\right)^{\frac{1}{p_n-1+1}}$ , 有

$$\dot{V}_n(t) \leq -\frac{1-\delta}{2}x_n^{p_n-1+1} + \gamma(\|x_{[n-1]}\|) \leq -\frac{1-\delta}{4}x_n^{p_n-1+1}.$$

进而由文献 [23] 中定义 2.2 知  $V(\cdot)$  是系统 (5) 的子系统  $x_n$  的输入到状态稳定 (ISS) Lyapunov 函数 (将  $x_{[n-1]}$  看作该子系统的输入). 再由文献 [23] 中定理 1 可知子系统  $x_n$  是输入到状态稳定的. 注意到子系统  $x_{[n-1]}$  的全局渐近稳定性, 由文献 [23] 中定义 2.1 可知系统 (5) 是全局渐近稳定的.

**引理 1 的证明**  $f_n$  满足假设 2 的情况 (i)

不同于上面情况 (i) 的特殊情况, 函数  $\psi$  不能确保上面定义的  $\bar{\psi}$  满足  $\bar{\psi}(0) = 0$ , 且函数  $g$  不一定满足  $x_n g(x_n) \geq 0$ . 但是, 由状态  $x_{[n-1]}$  的全局渐近稳定性, 必存在正数  $M_1$  使得  $\bar{\psi}(x_{[n-1]}(t)) \leq$

1) Young 不等式: 对任意  $c > 0, d > 0, \varepsilon > 0$ , 有  $y_1^c y_2^d \leq \frac{c}{c+d} \varepsilon y_1^{c+d} + \frac{d}{c+d} \varepsilon^{-\frac{c}{d}} y_2^{c+d}, \forall y_1 \geq 0, \forall y_2 \geq 0$ .

2) 如果一个连续函数  $\gamma: [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$  是严格增的, 且  $\gamma(0) = 0$ , 则称  $\gamma$  为  $\mathcal{K}$  函数. 进一步, 如果  $a = +\infty$ , 且  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \gamma(r) = +\infty$ , 则称  $\gamma$  为  $\mathcal{K}_\infty$  函数.

$M_1, \forall t \geq 0$ , 并且由假设 1 可知, 有  $x_n g(x_n) \leq a(|x_n| + |x_n|^{q_{n-1}+1}), \forall x_n \in \mathbb{R}$ . 由此及式 (6) 并注意到  $p_{n-1} + 1 > q_{n-1} + 1 \geq 1$ , 得到

$$\dot{V}_n(t) \leq -\frac{1-\delta}{2} x_n^{p_{n-1}+1} + a(|x_n| + |x_n|^{q_{n-1}+1}) + M_1, \quad \forall t \geq 0.$$

上式表明, 对任意初始值  $x_0$ , 状态  $x_n$  在  $[0, +\infty)$  上有界.

由情况 (i) 中假设: 系统  $\dot{z} = -z^{p_{n-1}} - g(z) + f_n(0, \dots, 0, z)$  在原点处全局渐近稳定, 故存在正定、径向无界的连续可微函数  $V(\cdot)$  和正定连续函数  $W(\cdot)$ , 使得沿着该系统的解, 有

$$\dot{V}(z(t)) = \frac{\partial V}{\partial z}(-z^{p_{n-1}} - g(z) + f_n(0, \dots, 0, z)) \leq -W(z).$$

由此沿着子系统  $x_n$  的解, 有

$$\dot{V}(x_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_n}(-x_n^{p_{n-1}} - g(x_n) + f_n(0, \dots, 0, x_n) + \Delta f_n(x)) \leq -W(x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_n} \Delta f_n(x), \quad (7)$$

其中  $\Delta f_n(x) = f_n(x) + v(x_{[n-1]}) - f_n(0, \dots, 0, x_n)$ .

由于  $V(\cdot)$  是正定的连续函数, 要证明  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_n(t) = 0$ , 只需证明  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_n(t)) = 0$ . 下面用反证法证明. 为此假设  $V(x_n(t))$  不收敛到零, 则必定有:

- ①  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_n(t)) = a$ , 其中  $a$  是某正数;
- ②  $V(x_n(t))$  不随着  $t \rightarrow +\infty$  收敛到任何常数.

首先, 对情况 ①, 必存在有限时刻  $T_{a/2}$ , 当  $t \geq T_{a/2}$  时, 总有  $a/2 \leq V(x_n(t)) \leq 3a/2$ . 记  $\Omega_1 = \{\zeta : a/2 \leq V(\zeta) \leq 3a/2\}$ . 因为  $V(\cdot)$  正定、径向无界, 所以  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$  是有界闭集且  $0 \notin \Omega_1$ . 由此及  $W(\cdot)$  的正定连续性知, 必存在正数  $b_1$  使得  $W(x_n) \geq b_1, \forall x_n \in \Omega_1$ . 此外, 由于  $\frac{\partial V}{\partial x_n}$  是连续的, 故存在正数  $M_2$  使得  $|\frac{\partial V}{\partial x_n}| \leq M_2, \forall x_n \in \Omega_1$ .

进一步, 由上面  $\Delta f_n(\cdot)$  的定义易知  $\Delta f_n(0, \dots, 0, x_n) = 0, \forall x_n \in \mathbb{R}$ , 所以有  $\lim_{x_{[n-1]} \rightarrow 0} \Delta f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall x_n \in \mathbb{R}$ . 故存在正数  $r_1$  使得当  $\|x_{[n-1]}\| \leq r_1$  时, 有  $|\Delta f_n(x)| \leq \frac{b_1}{2M_2}, \forall x_n \in \Omega_1$ . 由于  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{[n-1]}(t) = 0$ , 故存在有限时刻  $T_{r_1}$  使得当  $t \geq T_{r_1}$  时, 有  $\|x_{[n-1]}\| \leq r_1$ . 则当  $t \geq T = \max\{T_{a/2}, T_{r_1}\}$  时, 有  $x_n(t) \in \Omega_1$ . 进而利用式 (7) 可知对任意  $x_n \in \Omega_1$ , 当  $t \geq T$  时, 有

$$\dot{V}(t) \leq -W(x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_n} \Delta f_n(x) \leq -b_1 + \left| \frac{\partial V}{\partial x_n} \right| \cdot |\Delta f_n(x)| \leq -\frac{b_1}{2} < 0.$$

这意味着  $t$  充分大后,  $V(x_n(t))$  将严格小于  $a/2$ , 从而与前述的  $x_n(t) \in \Omega_1, \forall t \geq T$  矛盾, 故情况 ① 不成立.

其次, 对情况 ②, 由附录 A 中的结论可知, 必存在趋于无穷的时间序列  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$ , 满足  $V(x_n(t_i)) = c$  和  $V(x_n(t)) < c, \forall t \in (t_{2j+1}, t_{2j+2}), j = 0, 1, \dots$ , 其中  $c$  是正数. 如此, 易知  $\dot{V}(t_{2j+2}) \geq 0, j = 0, 1, \dots$ . 记  $\Omega_2 = \{\zeta : V(\zeta) = c\}$ . 因为  $V(\cdot)$  正定、径向无界, 所以  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}$  是有界闭集且  $0 \notin \Omega_2$ . 与情况 ① 类似, 必存在正数  $b_2$  和  $M_3$  使得  $W(x_n) \geq b_2$  和  $|\frac{\partial V}{\partial x_n}| \leq M_3, \forall x_n \in \Omega_2$ . 此外, 存在正数  $r_2$ , 使得当  $\|x_{[n-1]}\| \leq r_2$  时, 有  $|\Delta f_n(x)| \leq \frac{b_2}{2M_3}, \forall x_n \in \Omega_2$ . 由于  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{[n-1]}(t) = 0$ , 故存在有限时刻  $T_{r_2}$ , 使得当  $t \geq T_{r_2}$  时, 有  $\|x_{[n-1]}(t)\| \leq r_2$ . 再由  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ , 故存在奇自然数  $N$ , 使得  $t_N \geq T_{r_2}$ . 至此, 由式 (7) 可知

$$\dot{V}(t_{N+1}) \leq -W(x_n(t_{N+1})) + \frac{\partial V}{\partial x_n(t_{N+1})} \Delta f_n(x(t_{N+1}))$$

$$\begin{aligned} &\leq -b_2 + \left| \frac{\partial V}{\partial x_n(t_{N+1})} \right| \cdot |\Delta f_n(x(t_{N+1}))| \\ &\leq -\frac{b_2}{2} < 0. \end{aligned}$$

这与前面得到的  $\dot{V}(t_{2j+2}) \geq 0, j = 0, 1, \dots$  矛盾, 故情况 ② 不成立.

由于情况 ① 和 ② 都不成立, 故必有  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_n(t)) = 0$ , 从而证得状态  $x_n$  全局有界且收敛到零.

由于全局有界且收敛到零并不一定意味着全局渐近稳定 (参见文后附录 B), 因此, 为证明系统 (5) 的全局渐近稳定性, 还需要证明该系统在  $x = 0$  处是稳定的. 取任意  $\eta > 0$ , 记  $\Omega_\eta = \{\zeta : \frac{\eta}{2} \leq |\zeta| \leq \eta\}$ . 由此及  $W(\cdot)$  的正定连续性知, 存在正数  $b_3$  使得  $W(x_n) \geq b_3, \forall x_n \in \Omega_\eta$ . 由  $\frac{\partial V}{\partial x_n}$  的连续性和前述  $\Delta f_n(\cdot)$  的定义, 当  $x_{[n-1]}$  充分小时, 有  $|\frac{\partial V}{\partial x_n} \Delta f_n(x)| \leq \frac{b_3}{2}, \forall x_n \in \Omega_\eta$ . 由于子系统  $x_{[n-1]}$  是全局渐近稳定的, 故对充分小的  $x_{[n-1]}(0)$ , 有  $\sup_{t \geq 0} \|x_{[n-1]}(t)\|$  充分小, 并且  $\|x_{[n-1]}(t)\| < \frac{\eta}{2}, \forall t \geq 0$ . 由此及式 (7) 可知, 当  $x_{[n-1]}(0)$  充分小时, 对任意  $x_n \in \Omega_\eta$ , 总有

$$\dot{V} \leq -W(x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_n} \Delta f_n(x) \leq -\frac{1}{2}W(x_n) - \frac{b_3}{2} + \left| \frac{\partial V}{\partial x_n} \right| \cdot |\Delta f_n(x)| \leq -\frac{1}{2}W(x_n).$$

上式表明若  $x_{[n-1]}(0)$  充分小且  $|x_n(0)| < \frac{\eta}{2}$ , 则  $|x_n(t)| < \frac{\eta}{2}, \forall t \geq 0$ . 至此, 对任意的  $\eta > 0$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $\|x_0\| < \varepsilon$  时, 有  $\|x(t)\| \leq \|x_{[n-1]}(t)\| + |x_n(t)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta, \forall t \geq 0$ , 即系统 (5) 是稳定的.

#### $f_n$ 满足假设 2 的情况 (ii)

首先证明函数  $f_n(x_{n-1}, z)$  的如下性质:

$$z(f_n(x_{[n-1]}, z) - g(z)) \leq 0, \quad \forall x_{[n-1]} \in S, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

其中  $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$  是任意有界闭集. 显然, 当  $z = 0$  时, 式 (8) 成立. 当  $z > 0$  时, 采用反证法证明式 (8) 的正确性. 设此时式 (8) 不成立, 则由  $f_n$  的连续性知, 一定存在  $x'_{[n-1]} \in S$  和  $z' > 0$ , 当  $\varepsilon > 0$  充分小时, 在包含  $z'$  的开区间  $(z' - \varepsilon, z' + \varepsilon)$  内总有  $z > 0$  和  $f_n(x'_{[n-1]}, z) - g(z) > 0$ . 如此, 令系统  $\dot{z} = f_n(x'_{[n-1]}, z) - g(z)$  的初始值  $z(0) = z'$ . 则由假设 2 的情况 (ii) 可知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ , 从而存在有限时刻  $t_1$ , 使得  $0 \leq z(t_1) < z' - \varepsilon$ . 由此及系统解对时间  $t$  的连续性知, 存在另外有限时刻  $t_2$  和  $t_3$ , 其满足  $0 \leq t_2 < t_3 < t_1$ , 使得  $z(t_2) = z', z' - \varepsilon < z(t_3) < z'$  和  $\dot{z}(t) < 0 \forall t \in [t_2, t_3]$ , 这与前述的  $\dot{z} = f_n(x'_{[n-1]}, z) - g(z) > 0, \forall z \in (z' - \varepsilon, z' + \varepsilon)$  矛盾. 同理可证  $z < 0$  时式 (8) 亦成立.

其次, 定义  $V_n(t) = \frac{1}{2}x_n^2$ . 则沿着系统 (5) 的解, 有

$$\dot{V}_n(t) = x_n(-x_n^{p_n-1} - g(x_n) + f_n(x) + v(x_{[n-1]})) \leq -\frac{1}{2}x_n^{p_n-1+1} + x_n(f_n(x) - g(x_n)) + \bar{v}(x_{[n-1]}), \quad (9)$$

其中  $\bar{v} = \frac{p_n-1}{p_n-1+1} \left( \frac{2}{p_n-1+1} \right)^{\frac{1}{p_n-1}} |v(x_{[n-1]})|^{\frac{p_n-1+1}{p_n-1}}$  是非负连续函数, 且满足  $\bar{v}(0) = 0$ . 由状态  $x_{[n-1]}$  的全局渐近稳定性知, 存在有界闭集  $S' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , 使得  $x_{[n-1]}(t) \in S', \forall t \geq 0$ . 进而由式 (8) 和 (9), 有

$$\dot{V}_n(t) = x_n(-x_n^{p_n-1} - g(x_n) + f_n(x) + v(x_{[n-1]})) \leq -\frac{1}{2}x_n^{p_n-1+1} + \bar{v}(x_{[n-1]}).$$

由此并类似于证明之前所讨论的情况 (i) 的特殊情况 (最后一段), 可证得系统 (5) 的全局渐近稳定性.

至此, 引理 1 的证明完毕.

引理 1 表明, 若选择适当的函数  $v(\cdot)$  使得系统状态  $x_{[n-1]}$  全局渐近稳定, 则由式 (4) 可得到系统 (2) 的全局渐近稳定控制器. 下面利用增加幂积分方法, 构造出该函数  $v(\cdot)$  的显式形式.

首先, 利用假设 1 可得到下面的命题. 该命题给出了系统 (5) 中非线性项  $f_i, i = 1, \dots, n-2$  和  $\bar{f}_{n-1}$  的一个适当估计, 可确保存在函数  $v(\cdot)$  使得子系统  $x_{[n-1]}$  全局渐近稳定, 其证明类似于文献 [13] 中 (3.10) 和 (B6) 的证明, 因此在本文不再给出.

**命题 1** 存在已知非负光滑函数  $\bar{\phi}_i(x_{[i]}), i = 1, \dots, n-1$ , 使得

$$\begin{cases} |f_i(x)| \leq \bar{\phi}_i(x_{[i]}) \sum_{j=1}^i |x_j| + \frac{1}{2}|x_{i+1}|^{p_i}, & i = 1, \dots, n-2, \\ |\bar{f}_{n-1}(x)| \leq \bar{\phi}_{n-1}(x_{[n-1]}) \sum_{j=1}^{n-1} |x_j|. \end{cases}$$

基于命题 1, 由文献 [13] 中的设计步骤, 可构造出函数  $\xi_i(x_{[i]}), i = 1, \dots, n-1$  和  $x_i^*(x_{[i-1]}), i = 2, \dots, n$ :

$$\begin{cases} \xi_1(x_1) = x_1, \\ x_2^{*p_1}(x_1) = -\xi_1\beta_1(x_1), \\ \xi_i(x_{[i]}) = x_i^{p_1 \cdots p_{i-1}} - x_i^{*p_1 \cdots p_{i-1}}, & i = 2, \dots, n-1, \\ x_i^{*p_1 \cdots p_{i-1}}(x_{[i-1]}) = -\xi_{i-1}\beta_{i-1}(x_{[i-1]}), & i = 3, \dots, n, \end{cases}$$

其中  $\beta_i(x_{[i]}), i = 1, \dots, n-1$  是正的光滑函数 (易于参照文献 [13] 中方法给出), 使得沿着系统 (5) 的解, 有

$$\dot{U}(x_{[n-1]}) \leq -\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + |\xi_{n-1}|^{2-\frac{1}{p_1 \cdots p_{n-2}}} \cdot |v - x_n^{*p_{n-1}}|, \quad (10)$$

其中  $U = \frac{x_1^2}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{p_1 \cdots p_{i-1}} - x_i^{*p_1 \cdots p_{i-1}})^{2-\frac{1}{p_1 \cdots p_{i-1}}} ds$  是一阶连续可微、正定、径向无界函数.

如此, 选择

$$v(x_{[n-1]}) = x_n^{*p_{n-1}} = -(\xi_{n-1}\beta_{n-1}(x_{[n-1]}))^{p_1 \cdots p_{n-2}}. \quad (11)$$

则由式 (10) 可得

$$\dot{U}(x_{[n-1]}) \leq -\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2. \quad (12)$$

下面的定理概括了本文的主要结果.

**定理 1** 对满足假设 1 和 2 的系统 (2), 由式 (4) 和 (11) 构成的控制器  $u$  使得闭环系统是全局渐近稳定的.

**证明** 由式 (12) 和文献 [13] 中的定理 2.3 可知, 闭环系统 (由式 (2), (4) 和 (11) 组成) 的状态  $x_{[n-1]}$  是全局渐近稳定的. 进而, 由引理 1 可知, 闭环系统是全局渐近稳定的.

#### 4 仿真算例

考虑如下三维高阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_2\sqrt{x_3} + u. \end{cases} \quad (13)$$

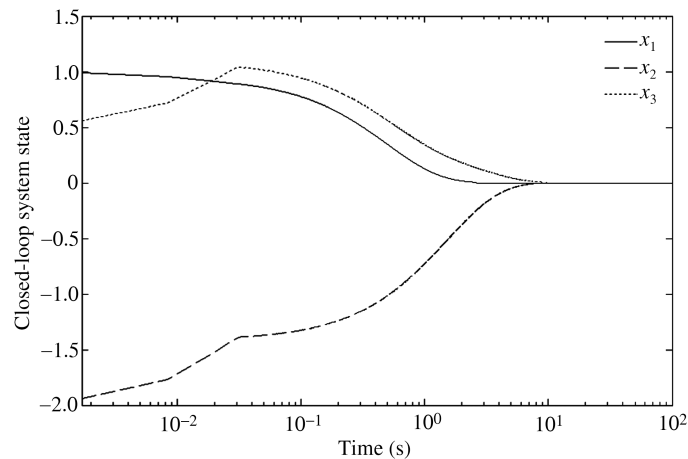


图 1 闭环系统状态的轨迹

Figure 1 The trajectories of the closed-loop system states

易验证系统 (13) 满足假设 1 和 2, 故按照第 3 节所给出的控制器设计方法, 可构造如下全局渐近稳定控制器:

$$u = -x_3 - 18(x_2^3 + 3x_1)^{\frac{1}{3}}. \quad (14)$$

设置闭环系统的初始值为:  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = -2$  和  $x_3(0) = 0.5$ . 应用 Matlab 系统仿真软件, 得到闭环系统状态的运动轨迹, 如图 1 所示 (为更清楚地展示状态的暂态行为, 时间轴采用对数坐标). 从中可以看出闭环系统状态  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$  渐近收敛到零.

## 5 结论

本文针对一类双控制输入通道高阶不确定非线性系统, 通过引入特定形式的反馈变换, 成功地给出了该类系统的全局渐近稳定控制设计方法. 值得注意的是, 针对系统不确定非线性项  $f_n$ , 尽管假设 2 给出了两类不同的限制条件以保证本文控制设计方法的可行性, 但应该看到, 该假设也表明本文方法具有一定的局限性. 一个自然的问题是: 是否存在更为有效的设计方案和更合理的控制设计方法, 既能保证系统镇定问题可解, 又能弱化对系统非线性项的限制条件. 另一方面, 若系统的控制输入通道个数多于两个, 则文中的控制设计方法将不再适用, 而且随着控制输入通道数的增加, 控制设计的解决难度也随之增加. 在多控制输入通道 (多于 2) 情况下, 如何解决高阶不确定非线性系统的全局渐近稳定控制设计, 是一个有待进一步研究的问题.

## 参考文献

- 1 Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. IEEE Trans Automat Control, 1991, 36: 1241-1253
- 2 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley & Sons, 1995
- 3 Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1995
- 4 Khalil H K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002



- 5 Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamics uncertainties. *Automat*, 1998, 34: 825–840
- 6 Ye X D, Jiang J P. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control of control directions. *IEEE Trans Automat Control*, 1998, 43: 1617–1621
- 7 Zhou J, Wen C Y, Zhang Y. Adaptive output control of nonlinear systems with uncertain dead-zone nonlinearity. *IEEE Trans Automat Control*, 2006, 51: 504–511
- 8 Pan Z G, Liu Y G, Shi S J. Output feedback stabilization for stochastic nonlinear systems in observer canonical form with stable zero-dynamics. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2001, 44: 292–308
- 9 Liu Y G, Pan Z G, Shi S J. Output feedback control design for strict-feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost. *IEEE Trans Automat Control*, 2003, 48: 509–514
- 10 Liu Y G, Zhang J F. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems. *Syst Control Lett*, 2004, 52: 123–135
- 11 Liu Y G, Zhang J F. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with stable zero-dynamics. *SIAM J Control Optim*, 2006, 45: 885–926
- 12 Lin W, Qian C J. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high order lower-triangular systems. *Syst Control Lett*, 2000, 39: 339–351
- 13 Lin W, Qian C J. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Control*, 2001, 46: 1061–1079
- 14 Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinear parameterized system: A nonsmooth feedback framework. *IEEE Trans Automat Control*, 2002, 47: 757–774
- 15 Qian C J, Lin W. Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Control*, 2006, 51: 1457–1471
- 16 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems. *Acta Automat Sin*, 2008, 34: 984–989
- 17 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive state-feedback stabilization for a class of high-order nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 2007, 43: 1772–1783
- 18 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive stabilization for a large class of high-order nonlinear uncertain systems. *Intl J Control*, 2009, 82: 1275–1287
- 19 Li W Q, Xie X J. Inverse optimal stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable. *Automatica*, 2009, 45: 498–503
- 20 Zhang J, Liu Y G. A new approach to adaptive control design without overparametrization for a class of uncertain nonlinear systems. *Sci China Inf Sci*, 2011, 54: 1419–1429
- 21 Yan X H, Liu Y G. Global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *SIAM J Control Optim*, 2010, 48: 4453–4473
- 22 Cheng D Z, Lin W. On p-norm forms of nonlinear systems. *IEEE Trans Automat Control*, 2003, 48: 1242–1248
- 23 Sontag E D, Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Syst Control Lett*, 1995, 24: 351–359

## 附录 A 引理 1 证明过程中一重要结论的证明

本附录证明结论: 如果  $V(x_n(t))$  关于  $t$  是连续、非负、有界的, 且不随着  $t \rightarrow +\infty$  收敛到任何常数, 则存在趋于无穷的时间序列  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$  使得  $V(x_n(t_i)) = c$  和  $V(x_n(t)) < c, \forall t \in (t_{2j+1}, t_{2j+2}), j = 0, 1, \dots$ , 其中  $c$  是正数.

由  $V(x_n(t))$  关于  $t$  的有界性可知, 对任一趋于无穷的时间序列  $\{\bar{t}_i, i = 1, 2, \dots\}$ ,  $\{V(x_n(\bar{t}_i)), i = 1, 2, \dots\}$  是有界数列. 从而  $\{\bar{t}_i\}$  中必存在趋于无穷的时间子序列  $\{t'_i, i = 1, 2, \dots\}$ , 使得  $\lim_{i \rightarrow +\infty} V(x_n(t'_i)) = c'$ , 其中  $c'$  为非负常数. 然而, 由于  $V(x_n(t))$  随着  $t \rightarrow +\infty$  不是收敛的, 故存在  $\epsilon > 0$ , 使得对任意  $T > 0$ , 都存在时刻  $t_T > T$ , 有  $|V(x_n(t_T)) - c'| \geq \epsilon$ . 如此, 取  $T_1 = 1$ , 则存在时刻  $t_{T_1} > T_1$ , 满足  $|V(x_n(t_{T_1})) - c'| \geq \epsilon$ . 再取  $T_2 = \max\{2, t_{T_1}\}$ , 则存在时刻  $t_{T_2} > T_2$ , 满足  $|V(x_n(t_{T_2})) - c'| \geq \epsilon$ . 依次重复下去, 最终可找到趋于无穷的时间序列  $\{t_{T_i}, i = 1, 2, \dots\}$ ,

满足  $|V(x_n(t_{T_i})) - c'| \geq \epsilon$ . 由于  $\{V(x_n(t_{T_i})), i = 1, 2, \dots\}$  是有界数列, 从而  $\{t_{T_i}\}$  中必存在趋于无穷的时间子序列  $\{t''_i, i = 1, 2, \dots\}$ , 使得  $\lim_{i \rightarrow +\infty} V(x_n(t''_i)) = c''$ , 其中  $c''$  是非负常数. 此外, 由于  $|V(x_n(t''_i)) - c'| \geq \epsilon$ , 故  $|c'' - c'| = \lim_{i \rightarrow +\infty} |V(x_n(t''_i)) - c'| \geq \epsilon$ , 从而  $c'' \neq c'$ . 综上所述, 对于不收敛的函数  $V(x_n(t))$ , 可找到趋于无穷的时间序列  $\{t'_i\}$  和  $\{t''_i\}$ , 其对应的数列  $\{V(x_n(t'_i))\}$  和  $\{V(x_n(t''_i))\}$  分别以非负常数  $c'$  和  $c'' (c'' \neq c')$  为极限.

不失一般性, 假定  $c'' < c'$ . 因而存在正数  $c$  满足  $c'' < c < c'$ . 由极限的定义可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 对任意  $j \geq N$ , 总有  $V(x_n(t'_j)) \geq \frac{c+c'}{2} > c$  和  $V(x_n(t''_j)) \leq \frac{c+c''}{2} < c$ . 如此, 选取趋于无穷的时间序列  $\{\hat{t}'_i, i = 1, 2, \dots\}$  和  $\{\hat{t}''_i, i = 1, 2, \dots\}$ , 分别满足  $\hat{t}'_i = t'_{i+N}$  和  $\hat{t}''_i = t''_{i+N}$ . 不难看出, 对任意的  $i = 1, 2, \dots$ , 都有  $V(x_n(\hat{t}'_i)) > c$  和  $V(x_n(\hat{t}''_i)) < c$ . 由此, 选取  $\hat{t}_1 = \hat{t}'_1, \hat{t}_{2j} = \min\{t \in \{\hat{t}'_i\} | t > \hat{t}_{2j-1}\}$  和  $\hat{t}_{2j+1} = \min\{t \in \{\hat{t}''_i\} | t > \hat{t}_{2j}\}, j = 1, 2, \dots$ , 从而得到趋于无穷的时间序列  $\{\hat{t}_i, i = 1, 2, \dots\}$ , 满足  $V(x_n(\hat{t}_{2j+1})) > c$  和  $V(x_n(\hat{t}_{2j+2})) < c, j = 0, 1, \dots$ .

由  $V(x_n(t))$  关于  $t$  的连续性以及  $V(x_n(\hat{t}_1)) > c$  和  $V(x_n(\hat{t}_2)) < c$  可知, 在开区间  $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$  内, 至少存在一个时刻满足  $V(x_n(t)) = c$ , 并记  $t_1$  为这些时刻中最大者, 即  $t_1 = \max\{t \in (\hat{t}_1, \hat{t}_2) | V(x_n(t)) = c\}$ . 显然  $V(x_n(t)) < c, \forall t \in (t_1, \hat{t}_2]$ . 类似地, 由  $V(x_n(\hat{t}_2)) < c$  和  $V(x_n(\hat{t}_3)) > c$  可知, 在开区间  $(\hat{t}_2, \hat{t}_3)$  内, 至少存在一个时刻满足  $V(x_n(t)) = c$ , 并记  $t_2$  为这些时刻中最小者, 即  $t_2 = \min\{t \in (\hat{t}_2, \hat{t}_3) | V(x_n(t)) = c\}$ . 显然  $V(x_n(t)) < c, \forall t \in [\hat{t}_2, t_2)$ . 如此, 得到了待证结论中的时刻  $t_1, t_2$ . 再由  $V(x_n(t))$  关于  $t$  的连续性以及  $V(x_n(\hat{t}_3)) > c, V(x_n(\hat{t}_4)) < c$  和  $V(x_n(\hat{t}_5)) > c$ , 可类似地得到待证结论中的时刻  $t_3, t_4$ . 依次重复下去, 最终可得到待证结论中的时间序列  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$ . 结论证毕.

### 附录 B “全局有界且收敛到零”与“全局渐近稳定”

如下定义综合自文献 [4] 的定义 4.1、定义 4.4 和定义 4.6.

**定义 B1** 如果对于方程  $\dot{x} = f(t, x)$  的平衡点  $x = 0$  (设  $t_0$  是系统的初始时刻),

1) 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ , 使得当  $\|x(t_0)\| < \delta$  时, 有  $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$ ;

2) 对任意初始值  $x(t_0)$ , 存在  $c = c(x(t_0), t_0)$ , 使得  $\|x(t)\| < c, \forall t \geq t_0$ , 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , 则称该平衡点是全局渐近稳定的. 若性质 1) 成立, 则该平衡点是稳定的, 反之称之为不稳定的; 若性质 2) 成立, 则称该系统状态是全局有界且收敛到零的. 特别地, 如果 1) 和 2) 中的  $\delta$  和  $c$  与  $t_0$  无关, 则上面提及的稳定性概念都是一致的.

显然由上面全局渐近稳定性的定义可知, 若一个系统是 (在原点处)“全局渐近稳定”的, 则该系统的状态一定“全局有界且收敛到零”. 但需指出的是, 一个系统的状态“全局有界且收敛到零”并不一定意味着该系统是 (在原点处)“全局渐近稳定”的. 因为前者的有界性和收敛性未必能确保后者所必须的对充分小的初值, 系统状态也充分小.

对非自治系统, “全局有界且收敛到零”不等价于“全局渐近稳定”. 下面通过一个一维非自治系统例子说明:  $\dot{z} = (2-t)z^{1/3}$ . 设该系统的初始时刻  $t_0 = 0$ , 初始值  $z(0) = z_0$ . 显然当  $z_0 = 0$  时,  $z \equiv 0$  是该系统的一个解, 且无论是否  $z_0 = 0$ , 该系统总存在非零解:

$$z(t) = \begin{cases} \text{sig}(z_0)(z_0^{2/3} + (\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^2))^{3/2}, & 0 \leq t < 2 + \sqrt{4 + 3z_0^{2/3}}, \\ 0, & t \geq 2 + \sqrt{4 + 3z_0^{2/3}}, \end{cases}$$

其中  $\text{sig}(\cdot)$  满足  $\text{sig}(\chi) = 1, \forall \chi \geq 0$  和  $\text{sig}(\chi) = -1, \forall \chi < 0$ . 由该非零解可知  $|z(2)| \geq (\frac{4}{3})^{3/2}$ . 这意味着该非自治系统是不稳定的 (虽然解是全局有界且收敛到零), 因而它不是全局渐近稳定的.

对自治系统, 仅当系统的维数是 1 时, “全局有界且收敛到零”和“全局渐近稳定”是等价的. 例如一维自治系统:  $\dot{z} = g(z)$ , 其中  $g$  是满足  $g(0) = 0$  的连续函数. 若其状态全局有界且收敛到零, 则类似于文中第 3 节式 (8) 的证明, 有  $zg(z) < 0, \forall z \neq 0$ , 从而  $V = z^2$  满足  $\dot{V} < 0, \forall z \neq 0$ . 由此及文献 [4] 中的定理 4.2 知该一维自治系统是 (原点处) 全局渐近稳定的. 故对一维自治系统, “全局有界且收敛到零”和“全局渐近稳定”是等价的.

对多维自治系统, “全局有界且收敛到零”和“全局渐近稳定”的不等价性将由如下二维自治系统 (参见脚注 3) 中例 1.8.2) 说明:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g(x_1) + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad (\text{B1})$$

其中

$$g(x_1) = \begin{cases} -4x_1, & x_1 > 0, \\ 2x_1, & -1 \leq x_1 \leq 0, \\ -x_1 - 3, & x_1 < -1. \end{cases}$$

3) Liao X X, Wang L, Yu P. Stability of Dynamic Systems. Amsterdam and Oxford: Elsevier, 2007.

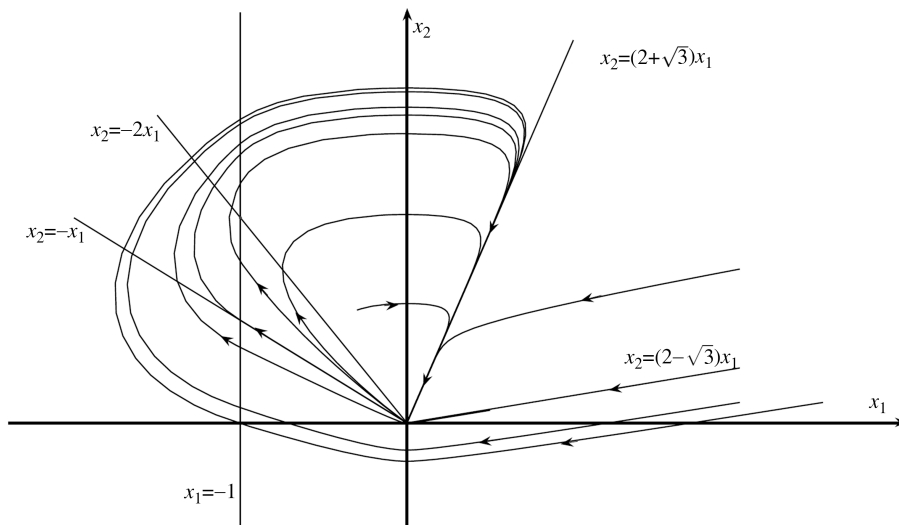


图 B1 系统 (B1) 解的相平面图

Figure B1 The phase plane diagrams of solutions of system (B1)

设系统的初始值  $x(0) = x_0$ . 显然,  $x = 0$  是系统 (B1) 的平衡点.

由于系统 (B1) 是分段线性系统, 故该系统的解存在且唯一, 并且按照  $x_1$  的不同取值, 有如下形式的通解:

1)  $x_1 > 0$ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1(2 - \sqrt{3})e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2(2 + \sqrt{3})e^{(-2-\sqrt{3})t}, \\ x_2(t) = c_1e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2e^{(-2-\sqrt{3})t}; \end{cases}$$

2)  $-1 \leq x_1 \leq 0$ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^t + c_2te^t, \\ x_2(t) = (-c_1 + c_2)e^t - c_2te^t \end{cases} \quad (B2)$$

3)  $x_1 < -1$ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}c_1e^{-\frac{t}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{1}{2}c_2e^{-\frac{t}{2}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \\ x_2(t) = c_1e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + 3. \end{cases}$$

基于如上通解, 可得到如下系统 (B1) 解的相平面图 (见图 B1, 因由 Matlab 绘出, 故较脚注 3) 的图 1.8.1 更为精细).

由此可见系统 (B1) 的解是全局有界且收敛到零的.

下面证明系统 (B1) 的平衡点是不稳定的. 由式 (B2) 可知, 当系统 (B1) 的初始值满足  $-1 < x_1(0) < 0, x_2(0) = -x_1(0)$  时, 该系统具有如下形式的非零解:

$$\begin{cases} x_1(t) = -c_1e^t, \\ x_2(t) = c_1e^t, \end{cases}$$

其中  $c_1 = -x_1(0), 0 \leq t \leq -\ln c_1$ . 由于对原点的任意小领域都存在充分小的  $c_1$  使得系统初始值  $x_0$  包含在该领域内, 且当  $t = -\ln c_1$  时系统的解满足

$$\sqrt{x_1^2(-\ln c_1) + x_2^2(-\ln c_1)} = \sqrt{2} > \varepsilon = 1.$$

故由定义 B1 知, 系统 (B1) 的平衡点  $x = 0$  是不稳定的.

尽管“全局渐近稳定”意味着“全局有界且收敛到零”, 但只对一维自治系统, 这两个稳定性概念才是等价的, 在一般情况下, “全局有界且收敛到零”并不意味着“全局渐近稳定”.

# Control design for high-order uncertain nonlinear systems with double control input channels

ZHANG Jian & LIU YunGang\*

*School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China*

\*E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

**Abstract** A problem of globally asymptotically stable control design is investigated for a class of high-order uncertain nonlinear systems. These systems, unlike the existing results, have double control input channels; that is, the control input directly affects two one-dimensional subsystems. This makes the existing methods of control design inapplicable or the control design problem difficult to solve, and therefore, it is of interest to explore a new control design method to solve the control design of high-order nonlinear systems with multiple control input channels. First, an effective feedback transformation is introduced. Hence, this control design problem under appropriate assumptions can be transformed into one with a single control input channel. Then, using existing results, particularly, the method of adding a power integrator, a methodology is proposed to design the globally asymptotically stable controller for the nonlinear systems under investigation. Although the systems studied in the paper are a special case of high-order nonlinear systems with multiple control input channels, the results obtained in the paper, while unavoidably having certain limitations, will provide a reference and guidance in tackling the general case. Finally, a simulation is provided to verify the effectiveness of the theoretical results obtained.

**Keywords** nonlinear systems, double control input channels, control design, adding a power integrator, asymptotic stability



**ZHANG Jian** was born in 1981. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from Shandong University in 2012. Currently, he is a Lecturer at Department of Mathematics, Zhengzhou University. His research interests include nonlinear control system theory, stochastic control, and adaptive control.



**LIU YunGang** received his Ph.D. degree in control theory and applications from the Shanghai Jiaotong University in 2000. During 2001–2003, he worked as a Postdoctoral Researcher at the Academy of Mathematics and Systems Science. Since 2003 he has been with the School of Control Sciences and Engineering, Shandong University, where he is now a Professor. He currently serves as Associate Editor for *Asian Journal of Control*, *Acta Automatica Sinica*, and *Archives of Control Sciences*. He is a recipient of the Guan Zhao-Zhi Award (the Best Paper Award of 2004 China Control Conference). His current research interests are adaptive control, stochastic systems, optimal control, and observer design.