

## 论文

# 一类不确定非线性系统无过参数自适应控制设计新方法

张健, 刘允刚\*

山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061

\* 通信作者. E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

收稿日期: 2010-02-26; 接受日期: 2011-06-13

国家自然科学基金 (批准号: 60974003)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-07-0513)、教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 108079)、山东省优秀中青年科学家奖励基金 (批准号: 2007BS01010)、山东省杰出青年基金 (批准号: JQ200919) 和山东大学自主创新基金 (批准号: 2009JQ008) 资助项目

**摘要** 文中研究了一类控制系数未知的更一般高阶不确定非线性系统的全局稳定自适应控制设计问题. 尽管现有文献已解决了该问题, 但对于  $n$  维系统, 现有构造稳定自适应控制的方法至少需要设计  $n+1$  个未知参数的动态调节律, 即动态补偿器的维数至少为  $n+1$ , 存在较为严重的过参数问题. 文中通过定义新的需动态调节的未知参数, 运用增加幂积分和有关自适应技术, 成功地解决了已有方法中的过参数问题, 给出了构造只含有一个参数调节律的稳定自适应控制设计新方法. 仿真算例验证了文中所给方法的有效性.

**关键词** 高阶非线性系统 未知控制系数 过参数问题 稳定控制设计 增加幂积分 自适应技术

## 1 引言

过去 20 余年间, 非线性系统的全局控制设计问题得到了广泛研究<sup>[1-9]</sup>. 特别是近年来, 针对高阶非线性系统, 基于稳定域思想, 发展了控制设计的增加幂积分方法<sup>[10]</sup>. 借助于该方法, 高阶非线性系统的稳定和跟踪控制设计问题取得了一系列研究成果<sup>[11-20]</sup>. 其中在文献 [18,19] 中, 给出了适于更一般高阶不确定非线性系统的自适应控制设计方法, 但存在动态补偿器的维数过高的缺陷.

本文针对如下高阶不确定非线性系统, 研究如何基于更少参数调节律 (动态补偿器的维数更低) 的全局稳定自适应控制设计问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(t, x, u)x_{i+1}^{p_i} + f_i(t, x, u), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = g_n(t, x, u)u^{p_n} + f_n(t, x, u), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  是系统可量测状态, 初始值为  $x(0) = x_0$ ;  $u \in \mathbb{R}$  为系统的控制输入;  $p_i \in \mathbb{R}_{\text{odd}}^{\geq 1} := \{\frac{m_1}{m_2} \mid \text{其中 } m_1, m_2 \text{ 皆是奇正整数, 且 } m_1 \geq m_2\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 称之为系统的 (高) 幂次;  $g_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  和  $f_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  是未知的连续函数, 分别称之为系统控制系数和非线性项. 为后面表述方便起见, 记  $x_{n+1} = u$  和  $x_{[k]} = [x_1, \dots, x_k]^T$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

引用格式: 张健, 刘允刚. 一类不确定非线性系统无过参数自适应控制设计新方法. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 892-902

系统 (1) 是一大类高阶不确定非线性系统的一般形式. 为了实现控制设计, 需对系统的不确定控制系数和非线性项作进一步假设. 例如, 起初的文献 [10-14] 都是建立在假定控制系数下界是已知的常数或光滑函数的基础上. 后来的文献 [18,19] 放宽了对系统控制系数的限制, 允许其下界是未知常数或函数, 但所给出的自适应控制设计方法至少需要  $n+1$  个参数调节律, 存在过参数问题 (详细解释见本节后两段). 因此, 一个自然且很有意义的问题是: 能否减少参数调节律个数 (即降低动态补偿器的维数), 从而解决自适应控制设计方法中存在的过参数问题.

本文的目标是在如下两个假设条件下, 通过定义新的未知参数, 给出只有一个参数调节律的自适应控制器, 彻底解决现有文献 [18,19] 中的过参数问题. 更具体地, 将设计具有如下形式的自适应状态反馈控制器:

$$\dot{\hat{\delta}} = \psi(x, \hat{\delta}), \quad u = \phi(x, \hat{\delta}), \quad (2)$$

其中  $\hat{\delta} \in \mathbb{R}$ ,  $\psi$  和  $\phi$  分别是光滑和连续函数, 使得  $\hat{\delta}$  和系统 (1) 的状态  $x$  全局有界, 且状态  $x$  渐近收敛到原点 (由下面的假设 1 可知原点为系统 (1) 的平凡解).

**假设 1** 对任意非线性函数  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 存在已知非负光滑函数  $\bar{f}_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$|f_i(t, x, u)| \leq \theta(1 + |x_{i+1}|^{q_i})\bar{f}_i(x_{[i]}) \sum_{j=1}^i |x_j|, \quad (3)$$

其中  $0 \leq q_i < p_i$  为已知常数;  $\theta > 0$  为某一未知常数.

**假设 2** 对任意控制系数  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 其符号是已知的, 且存在未知常数  $a > 0$ , 已知光滑函数  $\lambda_i: \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  和  $\mu_i: \mathbb{R}^{i+1} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  使得

$$0 < a\lambda_i(x_{[i]}) \leq |g_i(t, x, u)| \leq \theta\mu_i(x_{[i+1]}), \quad (4)$$

其中当  $i = n$  时,  $x_{[n+1]} = [x^T, u]^T$ ;  $\theta$  和假设 1 中的未知参数相同, 一般充分大以使得这两假设中不等式同时成立.

由假设 1 可知, 系统 (1) 的非线性项  $f_i$  的上界估计直接依赖于未知常数  $\theta$ ,  $|x_{i+1}|^{q_i}$  和  $\sum_{k=1}^i |x_k|$ , 因而较文献 [18] 中的假设 1 弱许多. 还可知, 文献 [18] 中的假设 3 是本文假设 2 的特例, 因为前者不依赖于  $x_{i+1}$ , 且如果定义  $a = \min\{a_1, \dots, a_n\}$  和  $\theta = \max\{b_1, \dots, b_n\}$ , 则前者就具有后者的形式. 再由于文献 [18] 中的假设 2 在本文中不再需要, 故本文所研究的系统较文献 [18] 中的系统更为一般. 另外, 本文所研究的系统包含文献 [19] 的无零动态时的研究对象, 因为若该文献中的假设 2 和假设 3 (或假设 3') 成立, 则本文中的假设 1 和 2 就成立.

需进一步强调的是, 对于非线性系统 (1), 现有文献 [18,19] 基于至少  $n+1$  个未知参数的动态调节律 (即至少  $n+1$  维动态补偿器), 已给出了稳定自适应控制器的设计策略. 但是由上段的分析易知, 只需两个未知参数, 例如本文假设 1 和 2 中的  $a$  和  $\theta$ , 就能够界定文献 [18,19] 中所研究非线性系统的未知性/不确定性. 正是在这样的意义下, 文献 [18,19] 中的自适应方法存在较为严重的过参数问题. 不同于现有文献, 在下文中, 将通过定义新的需动态调节的未知参数, 运用增加幂积分和有关自适应技术, 解决现有方法中的过参数问题, 构造出只含有一个参数调节律的稳定自适应控制器.

## 2 自适应控制器设计

本节通过增加幂次积分方法, 迭代地给出形如公式 (2) 的连续自适应状态反馈控制器, 使得闭环系统所有状态全局有界, 且系统 (1) 的状态渐近收敛到原点. 下文中, 2.1 小节将进一步界定系统 (1)

的非线性和不确定性, 更重要的是给出新的未知参数的定义及其动态调节律的基本形式, 这些是 2.2 小节设计稳定自适应控制器, 分析闭环系统特性的基础。

## 2.1 基本结果

由假设 2 可知控制系数  $g_i, i = 1, \dots, n$  的符号已知且不随时间变化, 故不失一般性, 假定  $g_i > 0$ . 此外, 由假设 1 和 2 可得如下命题 1(证明见附录 A1), 该命题给出了系统 (1) 非线性项的一个更进一步界定, 目的是实现  $|x_{i+1}|$  与  $\sum_{j=1}^i |x_j|$  的分离, 以便于在 2.2 小节中使用增加幂积分方法设计稳定自适应控制器。

**命题 1** 对任意非线性函数  $f_i, i = 1, \dots, n$ , 有如下关系式成立:

$$|f_i(t, x, u)| \leq \frac{g_i}{2} |x_{i+1}|^{p_i} + \bar{\theta} \varphi_i(x_{[i]}) \sum_{j=1}^i |x_j|, \quad (5)$$

其中  $\bar{\theta} \geq \max\{1, \theta\}$  是某未知常数,  $\varphi_i = \bar{f}_i \left(1 + \left(\frac{2}{\lambda_i} \sum_{j=1}^i \sqrt{1 + x_j^2 \bar{f}_i^2}\right)^{\frac{q_i}{p_i - q_i}}\right)$  是已知的非负光滑函数。

如此, 为下小节中设计只含有一个动态调节律的自适应控制器, 首先定义如下未知参数:

$$\Theta := \bar{\theta}^{2p_1 \cdots p_{n-2}} \max\{a^{-2}, a^{2p_1 \cdots p_{n-2}-2}\}, \quad (6)$$

其中  $a$  与假设 2 中的未知参数相同. 记  $\hat{\theta}(t)$  为未知参数  $\theta$  的估计值, 其满足如下形式的动态调节律:

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau(x, \hat{\theta}), \quad \hat{\theta}(0) = 1, \quad (7)$$

其中  $\tau(x, \hat{\theta}) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \hat{\theta} \in \mathbb{R}$  是待定的光滑函数. 显然, 上面的动态调节律确保:  $\hat{\theta}(t) \geq 1, \forall t \geq 0$ .

不同于文献 [18, 19] 中的自适应控制设计, 本文只定义了一个未知参数  $\theta$ , 且在下小节的自适应控制设计只需一维的动态补偿器。

如下命题给出了未知参数  $\theta$  满足的多个重要不等式. 这些将在下面的自适应控制设计和闭环系统性能分析中用到。

**命题 2** 未知参数  $\theta$  满足如下关系式:

1.  $\theta \geq \bar{\theta}^2 \geq 1, a\theta \geq \bar{\theta}, a\theta \geq a^{-1}$ ;
2.  $a\theta \geq \frac{\bar{\theta}^{2p_1 \cdots p_{i-1}}}{\bar{\theta}^{2p_1 \cdots p_{i-1}-1}} a^{\frac{1}{2p_1 \cdots p_{i-1}}}, \forall i = 2, \dots, n$ ;
3.  $a\theta \geq \bar{\theta}^{2p_1 \cdots p_{i-2}} a^{2p_1 \cdots p_{i-2}-1}, \forall i = 2, \dots, n$ .

**证明** 由  $\bar{\theta}$  的性质和  $\theta$  的公式 (6), 以及  $p_i \geq 1, i = 1, \dots, n-1$ , 很容易验证该命题所有不等式的正确性。

其次, 定义如下状态变换:

$$z_1 = x_1, \quad z_i = x_i^{p_1 \cdots p_{i-1}} - \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}}(x_{[i-1]}, \hat{\theta}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (8)$$

并记实际控制器  $u = \alpha_n(x, \hat{\theta})$ , 其中  $\alpha_i: \mathbb{R}^i \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  是待定的连续函数且满足  $\alpha_i(0, \hat{\theta}) = 0, \forall \hat{\theta} \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 控制设计过程

本小节中, 将通过迭代步骤构造出公式 (7) 和 (8) 中的待定函数  $\tau$  和  $\alpha_i$ , 从而得到形如公式 (2) 的自适应控制器的显式形式.

**第 1 步** 定义  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{a}{2}\tilde{\theta}^2$ , 其中  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  为参数估计误差. 沿着公式 (1) 和 (7) 的解, 有

$$\dot{V}_1 = z_1 (g_1 \alpha_1^{p_1} + g_1 z_2 + f_1) - a\tau(x, \hat{\theta})\tilde{\theta}. \quad (9)$$

从而由命题 1, 公式 (9) 和命题 2 性质 1 中的  $\bar{\theta} \leq a\theta$  和  $a^{-1} \leq a\theta$ , 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq g_1 z_1 \alpha_1^{p_1} + g_1 z_1 z_2 + \frac{g_1}{2}|z_1| \cdot |x_2|^{p_1} + a\theta\varphi_1(x_1)z_1^2 - a\tau(x, \hat{\theta})\tilde{\theta} \\ &\leq -\frac{n+\frac{1}{4}}{a}z_1^2 + g_1 z_1 z_2 + \frac{g_1}{2}|z_1| \cdot |x_2|^{p_1} + g_1 z_1 \alpha_1^{p_1} + a\tau_1(x_1)\theta - a\tau(x, \hat{\theta})\tilde{\theta} \\ &\leq -\frac{n}{a}z_1^2 + g_1 z_1 z_2 + \frac{g_1}{2}|z_1| (|x_2|^{p_1} + \text{sign}(z_1)\alpha_1^{p_1}) \\ &\quad + az_1 \left( \frac{g_1}{2a}\alpha_1^{p_1} + \hat{\theta} \left( n + \frac{1}{4} + \varphi_1(x_1) \right) z_1 \right) + a\tilde{\theta} \left( \tau_1(x_1) - \tau(x, \hat{\theta}) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\tau_1 = (n + \frac{1}{4} + \varphi_1(x_1)) z_1^2|_{(8)} \geq 0$ . 在接下来的迭代设计步骤中, 将依次构造非负光滑函数  $\tau_k(x_{[k]}, \hat{\theta})$ ,  $k = 2, \dots, n$ , 并令  $\tau = \tau_n$  以得到参数估计  $\hat{\theta}$  的适当调节律 (7).

至此, 易于构造虚拟控制器  $\alpha_1$ , 使得

$$\alpha_1^{p_1} = -2\hat{\theta}\lambda_1^{-1}(x_1) \left( n + \frac{1}{4} + \varphi_1(x_1) \right) z_1 =: -h_1(x_1, \hat{\theta})z_1, \quad (11)$$

从而由公式 (10), 假设 2 及事实  $\theta \leq \bar{\theta}$ , 并注意到  $|x_2|^{p_1} + \text{sign}(z_1)\alpha_1^{p_1} = |x_2|^{p_1} - h_1|z_1| \leq |x_2|^{p_1} + h_1|z_1| = |z_2|$ , 可得

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{n}{a}z_1^2 + a\tilde{\theta}(\tau_1 - \tau) + \frac{3}{2}\bar{\theta}\mu_1(x_{[2]})|z_1| \cdot |z_2|. \quad (12)$$

**注 1** 需注意的是, 公式 (10) 的第 2 个不等号右端项 “ $-\frac{n+\frac{1}{4}}{a}z_1^2$ ” 含有未知参数  $a$ , 不同于文献 [19] 相应设计步骤中的项 “ $-nz_1^2$ ”. 该不同是本文能够实现无过参数自适应控制设计的关键所在.

**迭代设计步骤** ( $k = 2, \dots, n$ ) 假定前  $k-1$  设计步骤已经完成, 即已找到适当的函数  $\alpha_i, \tau_i, i = 1, \dots, k-1$  分别满足  $\alpha_i^{p_1 \cdots p_i} = -h_i(x_{[i]}, \hat{\theta})z_i$  和  $\tau_i = \sum_{j=1}^i \left( n - j + \frac{5}{4} + \rho_j(x_{[j]}, \hat{\theta}) \right) z_j^2$ , 并使得  $V_{k-1}(x_{[k-1]}, \hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{k-1} W_i + \frac{a}{2}\tilde{\theta}^2$  满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} &\leq -\frac{n-k+2}{a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + \left( a\tilde{\theta} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_{k-1} - \tau) \\ &\quad + \frac{3}{2}\bar{\theta}\mu_{k-1}(x_{[k]})|z_{k-1}|^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-2}-1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} |x_k^{p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_{k-1}}|, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $h_i, \rho_i, i = 1, \dots, k-1$  是已知的非负光滑函数, 且  $\rho_1 = \varphi_1$ ;  $W_i, i = 1, \dots, k-1$  定义如下:

$$W_1 = \frac{1}{2}z_1^2, \quad W_i = \int_{\alpha_{i-1}}^{x_i} (s^{p_1 \cdots p_{i-1}} - \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}})^{2-1/p_1 \cdots p_{i-1}} ds, \quad i = 2, \dots, k-1. \quad (14)$$

为完成第  $k$  步, 类似地定义  $W_k = \int_{\alpha_{k-1}}^{x_k} (s^{p_1 \cdots p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}})^{2-1/p_1 \cdots p_{k-1}} ds$ . 借助于文献 [11] 中的相应证明, 易验证  $W_i, i = 1, \dots, k$  是一阶连续可导函数, 特别是, 当  $z_i \neq 0$  时,  $W_i > 0$ , 当  $z_i = 0$  时,  $W_i = 0$ , 当  $|z_i| \rightarrow +\infty$  时,  $W_i \rightarrow +\infty$ .

**注 2** 函数  $W_i, i = 1, \dots, k$  的定义与文献 [12,19] 中的相同, 所以  $W_i$  更多的性质可参见这两篇文献 (特别是文献 [19] 中命题 4 和 5), 故在下面的设计中不加证明直接引用这些性质.

定义  $V_k = V_{k-1} + W_k$ , 利用  $W_i, i = 1, \dots, k$  的性质, 易证函数  $V_k$  一阶连续可导, 正定且径向无界. 则沿着公式 (1) 和 (7) 的解并注意到公式 (13), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\frac{n-k+2}{a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + \left( a\tilde{\theta} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_{k-1} - \tau) + \frac{3}{2} \bar{\theta} \mu_{k-1} |z_{k-1}| \frac{2p_1 \cdots p_{k-2} - 1}{p_1 \cdots p_{k-2}} |x_k^{p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_{k-1}}| \\ & + \tau \frac{\partial W_k}{\partial \hat{\theta}} + g_k z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} x_{k+1}^{p_k} + z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} f_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i). \end{aligned} \quad (15)$$

为得到  $\alpha_k$  的适当形式, 需要给出公式 (15) 右端第 3 项和最后两项的恰当估计, 即如下命题, 其证明见附录 A2.

**命题 3** 存在已知非负光滑函数  $\rho_k : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$\begin{aligned} & z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} f_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i) + \frac{3}{2} \bar{\theta} \mu_{k-1} |z_{k-1}| \frac{2p_1 \cdots p_{k-2} - 1}{p_1 \cdots p_{k-2}} |x_k^{p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_{k-1}}| \\ & \leq \frac{g_k}{2} |z_k| \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} |x_{k+1}|^{p_k} + \frac{3}{4a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + a\theta \rho_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2. \end{aligned} \quad (16)$$

如此, 将公式 (16) 代入公式 (15) 并由命题 2 性质 1 中的  $a^{-1} \leq a\theta$ , 经适当地加减项、合并项的处理后, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\frac{n-k+5/4}{a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + \left( a\tilde{\theta} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_{k-1} - \tau) + \tau \frac{\partial W_k}{\partial \hat{\theta}} + g_k z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} (x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}) \\ & + \frac{g_k}{2} |z_k| \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} |x_{k+1}|^{p_k} + g_k z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} \alpha_k^{p_k} + a\theta \rho_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2 \\ \leq & -\frac{n-k+5/4}{a} \sum_{i=1}^k z_i^2 + \left( a\tilde{\theta} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_k - \tau) \\ & + a z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} \left( \frac{g_k}{2a} \alpha_k^{p_k} + \hat{\theta} z_k \frac{1}{p_1 \cdots p_{k-1}} \left( n - k + \frac{5}{4} + \rho_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) \right) \right) + g_k z_k \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} (x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}) \\ & + \frac{g_k}{2} |z_k| \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{p_1 \cdots p_{k-1}} (|x_{k+1}|^{p_k} + \text{sign}(z_k) \alpha_k^{p_k}) + \frac{\partial W_k}{\partial \hat{\theta}} \tau_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} (\tau_k - \tau_{k-1}), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\tau_k = \tau_{k-1} + (n - k + \frac{5}{4} + \rho_k) z_k^2$  是非负光滑函数.

为了最终得到显式的  $\alpha_k$ , 需对公式 (17) 中第 2 个不等号右端的后两项作进一步处理. 首先, 因为  $W_1 = \frac{1}{2} z_1^2$ , 故有  $\frac{\partial W_1}{\partial \hat{\theta}} = 0$ , 并且由文献 [19] 中的命题 5 和文献 [12] 中的公式 (36), 可得到  $\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}}, i = 2, \dots, k$  的如下估计:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \leq 4|z_i| \cdot \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}^{p_{i-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right|, \quad i = 2, \dots, k. \quad (18)$$

进而由前面的假定:  $\tau_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (n - i + \frac{5}{4} + \rho_i) z_i^2$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k}{\partial \hat{\theta}} \tau_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} (\tau_k - \tau_{k-1}) &\leq 4|z_k| \cdot \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right| \sum_{i=1}^k \left( n - i + \frac{5}{4} + \rho_i \right) z_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k-1} 4|z_i| \cdot \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right| \left( n - k + \frac{5}{4} + \rho_k \right) z_k^2. \end{aligned} \quad (19)$$

注意到由 Young 不等式<sup>1)</sup>, 有

$$|z_k| \cdot \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right| \left( n + \frac{1}{4} + \rho_i \right) z_i^2 \leq \frac{z_i^2}{32a} + 8a \left( \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right)^2 \left( n + \frac{1}{4} + \rho_i \right)^2 z_i^2 z_k^2, \quad (20)$$

和 (因  $k \geq 2$ )

$$|z_i| \cdot \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right| \left( n + \frac{3}{4} + \rho_k \right) z_k^2 \leq \frac{z_i^2}{32a} + 8a \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right)^2 \left( n + \frac{3}{4} + \rho_k \right)^2 z_k^4, \quad (21)$$

从而有

$$\frac{\partial W_k}{\partial \hat{\theta}} \tau_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} (\tau_k - \tau_{k-1}) \leq \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^k z_i^2 + a z_k^2 \gamma_k(x_{[k]}, \hat{\theta}), \quad (22)$$

其中  $\gamma_k = 32 \left( \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right)^2 \sum_{i=1}^k (n + 1/4 + \rho_i)^2 z_i^2 + 32(n + 3/4 + \rho_k)^2 z_k^2 \sum_{i=2}^{k-1} \left( \frac{\partial \alpha_{i-1}^{p_1 \cdots p_{i-1}}}{\partial \hat{\theta}} \right)^2$  是非负的光滑函数.

如此, 基于公式 (17) 和 (22), 易于构造控制器  $\alpha_k$ , 使得

$$\begin{aligned} \alpha_k^{p_1 \cdots p_k} &= -\lambda_k^{-p_1 \cdots p_{k-1}} \left( 2\hat{\theta} \left( n - k + \frac{5}{4} + \rho_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) \right) + \gamma_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) \right)^{p_1 \cdots p_{k-1}} z_k \\ &=: -h_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k, \end{aligned} \quad (23)$$

则由假设 2 和事实  $\theta \leq \bar{\theta}$ , 并注意到  $|x_{k+1}|^{p_k} + \text{sign}(z_k) \alpha_k^{p_k} = |x_{k+1}|^{p_k} - (h_k |z_k|)^{\frac{1}{p_1 \cdots p_{k-1}}} \leq |x_{k+1}^{p_k} + (h_k z_k)^{\frac{1}{p_1 \cdots p_{k-1}}}| = |x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}|$ , 可得

$$\dot{V}_k \leq -\frac{n-k+1}{a} \sum_{i=1}^k z_i^2 + \left( a\tilde{\theta} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\theta}} \right) (\tau_k - \tau) + \frac{3}{2} \bar{\theta} \mu_k(x_{[k+1]}) |z_k|^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}{p_1 \cdots p_{k-1}}} |x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}|. \quad (24)$$

至此, 迭代步设计完毕.

由上面的迭代设计步骤, 当  $k = n$  时, 可得到连续函数  $\alpha_n = -(h_n(x, \hat{\theta}) z_n)^{\frac{1}{p_1 \cdots p_n}}$  和光滑函数  $\tau_n = \sum_{i=1}^n (n - i + \frac{5}{4} + \rho_i) z_i^2$ , 使得公式 (24) 在  $k = n$  时亦成立. 故选择如下实际控制器  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  及其相应的一维参数调节律 (动态补偿器):

$$\begin{cases} u = \alpha_n(x, \hat{\theta}), \\ \dot{\hat{\theta}} = \tau(x, \hat{\theta}) = \tau_n(x, \hat{\theta}), \end{cases} \quad (25)$$

1) Young 不等式有多种形式, 此处以及后文中用到的形式为: 对任意的  $c > 0, d > 0, \epsilon > 0$ , 有  $y_1^c y_2^d \leq \frac{c}{c+d} \epsilon y_1^{c+d} + \frac{d}{c+d} \epsilon^{-\frac{d}{c}} y_2^{c+d}$ ,  $\forall y_1 \in \mathbb{R}^+, \forall y_2 \in \mathbb{R}^+$

并注意到  $x_{n+1} = u$ , 可得

$$\dot{V}_n \leq -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n z_i^2, \quad (26)$$

其中  $V_n = \sum_{i=1}^n W_i + \frac{a}{2} \tilde{\theta}^2$ .

### 3 主要结果

如下定理概括了本文的主要结果.

**定理 1** 对于满足假设 1 和假设 2 的高阶非线性系统 (1), 形如公式 (2) 的自适应状态反馈稳定控制器 (25) 使得闭环系统所有状态全局有界, 并且  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**证明** 由系统 (1) 的非线性项和所设计的控制器  $u$  易知闭环系统是连续但不是 Lipschitz 的. 则由微分方程解的有关理论知, 对任意系统初始值, 闭环系统可能存在多个解, 因此定理 1 描述的是所有可能闭环系统解的共性行为. 此外, 为方便起见, 记  $V_n(t)$  和  $W_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  分别为  $V_n(\cdot)$  和  $W_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$  在  $t$  时刻的取值.

首先, 注意到  $W_i(t) \geq 0, \forall t \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ , 则由公式 (26), 可知  $\sup_{t \geq 0} W_i(t) \leq \sup_{t \geq 0} V_n(t) \leq V_n(0) < \infty, i = 1, \dots, n$ , 和  $\sup_{t \geq 0} |\tilde{\theta}(t)| \leq \sqrt{\frac{2V_n(0)}{a}} < \infty$ . 故由事实  $\hat{\theta} < \theta + |\tilde{\theta}|$ , 不难得到  $\sup_{t \geq 0} \hat{\theta}(t) < \infty$ . 进一步, 由  $W_1(t)$  的全局有界性, 可得  $\sup_{t \geq 0} x_1(t) \leq \sup_{t \geq 0} \sqrt{2W_1(t)} < \infty$ . 进而基于文献 [19] 中的命题 4, 即  $(x_k - \alpha_{k-1}(x_{[k-1]}, \hat{\theta}))^{2p_1 \cdots p_{k-1}} \leq \frac{W_k}{N}, k = 2, \dots, n$ , 其中  $N$  是已知的正常数, 取  $k = 2$ , 由  $W_2(t)$ ,  $x_1$  和  $\hat{\theta}$  的全局有界性及  $\alpha_1$  的连续性, 可得  $\sup_{t \geq 0} x_2(t) \leq \sup_{t \geq 0} (\sqrt[2p_1]{\frac{W_2(t)}{N}} + |\alpha_1(x_1, \hat{\theta})|) < \infty$ . 依次类推, 易得到  $\sup_{t \geq 0} x_i(t) < \infty, i = 3, \dots, n$ , 从而可知闭环系统的所有状态全局有界.

下面证明  $x(t)$  的收敛性. 一方面, 对公式 (26) 的两边分别在区间  $[0, \infty)$  上积分, 由于  $V_n(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ , 故有  $\int_0^\infty z_i^2(s) ds < V_n(0) < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ , 即  $z_i$  是平方可积的. 另一方面, 由已证明的闭环系统状态的有界性, 公式 (1) 和 (8) 以及假设 1 和 2, 可知  $\sup_{t \geq 0} \dot{z}_i(t) < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ . 综合上述两方面结果, 利用 Barbălat 引理<sup>2)</sup>, 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ , 进而由  $\alpha_i^{p_1 \cdots p_i}, i = 1, \dots, n$  的表达式, 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_i^{p_1 \cdots p_i}(t) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . 从而由公式 (8), 不难得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, i = 1, \dots, n$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

### 4 仿真算例

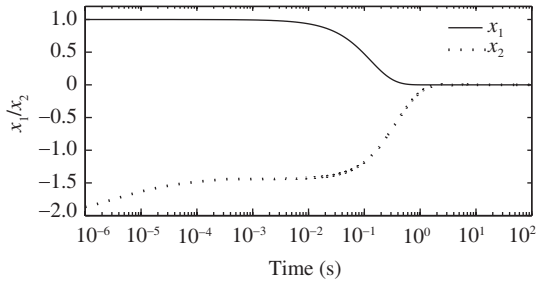
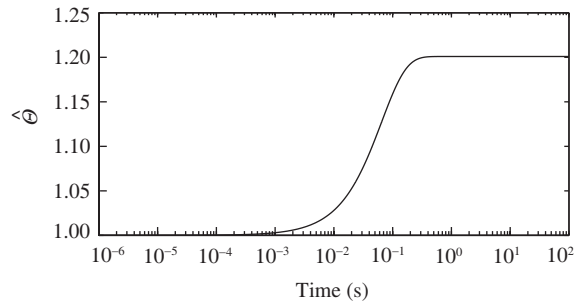
考虑如下的二维高阶不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta_1(2 - 0.2 \sin x_2)x_1^3 + \theta_2 x_1, \\ \dot{x}_2 = 2\theta_3 u + \theta_4 x_2, \end{cases} \quad (27)$$

其中  $\theta_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$  是未知常数.

首先, 定义未知参数  $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ , 显见系统 (27) 满足假设 1, 其次, 定义未知参数  $a = \min\{\theta_1, \theta_3\}$ , 并取  $\lambda_1(x_1) = \lambda_2(x_{[2]}) = 1$  和  $\mu_1(x_1) = \mu_2(x_{[2]}) = 2.2$ , 可知系统 (27) 满足假设 2. 故

2) 设  $\sigma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  平方可积, 即  $\int_0^\infty \sigma^2(s) ds < \infty$ . 则如果  $\dot{\sigma}(t), t \in [0, \infty)$ , 存在且有界, 那么  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$

图 1 系统状态  $x_1, x_2$  的轨迹Figure 1 The trajectories of  $x_1$  and  $x_2$ 图 2 参数估计  $\hat{\theta}$  的轨迹Figure 2 The trajectory of  $\hat{\theta}$ 

按照第 2 节所给出的控制器设计方法, 易构造出下述形如公式 (2) 的自适应状态反馈稳定控制器, 使得系统 (27) 的状态满足定理 1 中结论.

$$\begin{cases} u = -(\hat{\theta}\rho(\hat{\theta}) + 648x_1^4 + 72\rho^2(\hat{\theta})x_1^2z_2^2)z_2^{1/3}, \\ \dot{\hat{\theta}} = 3x_1^2 + \rho(\hat{\theta})z_2^2, \hat{\theta}(0) = 1, \end{cases} \quad (28)$$

其中  $z_2 = x_2^3 + 3\hat{\theta}x_1$ ,  $\rho(\hat{\theta}) = 72(3\hat{\theta}^2 + \hat{\theta})^2 + 12\hat{\theta} + \frac{5}{6}(3\hat{\theta})^{2/5} + 3$ .

令  $\theta_i = 1.2, i = 1, 2, 3, 4$ , 初始值  $x_1(0) = 1, x_2(0) = -2$ . 应用 Matlab 软件进行仿真, 得到闭环系统状态  $x_1, x_2$  和  $\hat{\theta}$  的运动轨迹, 如图 1 和图 2 所示 (为更清楚地展示状态的瞬时行为, 时间轴采用对数坐标). 从中可以看出状态  $x_1$  和  $x_2$  收敛到原点,  $\hat{\theta}$  收敛到一个有限值.

## 5 结论

本文研究了一类高阶不确定非线性系统的全局稳定自适应控制设计问题, 通过定义新的需动态调节的未知参数, 给出了构造只含有一个参数调节律的稳定自适应控制设计新方法. 需指出的是, 现有文献中的设计方法皆需要多个参数调节律, 存在严重的过参数问题, 而本文所给出的自适应控制设计方法只需一个参数调节律, 因而闭环系统的维数更低, 这一点对控制系统具有一定的实际应用价值. 需进一步研究的是: 当系统 (1) 并不是所有状态可量测且控制系数具有更一般未知性时, 如何设计状态观测器和未知参数自适应调节律, 进而给出无过参数自适应输出反馈稳定控制设计方法.

## 参考文献

- 1 Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. IEEE Trans Autom Control, 1991, 36: 1241–1253
- 2 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley & Sons, INC, 1995
- 3 Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamics uncertainties. Automatica, 1998, 34: 825–840
- 4 Ye X D, Jiang J P. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions. IEEE Trans Autom Control, 1998, 43: 1617–1621
- 5 Zhou J, Wen C Y, Zhang Y. Adaptive output control of nonlinear systems with uncertain dead-zone nonlinearity. IEEE Trans Autom Control, 2006, 51: 504–511



- 6 Pan Z, Liu Y, Shi S. Output feedback stabilization for stochastic nonlinear systems in observer canonical form with stable zero-dynamics. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2001, 44: 292–308
- 7 Liu Y, Pan Z, Shi S. Output feedback control design for strict-feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48: 509–514
- 8 Liu Y, Zhang J. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems. *Syst Control Lett*, 2004, 52: 123–135
- 9 Liu Y, Zhang J. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with stable zero-dynamics. *SIAM J Control Opt*, 2006, 45: 885–926
- 10 Lin W, Qian C. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high order lower-triangular systems. *Syst Control Lett*, 2000, 39: 339–351
- 11 Lin W, Qian C. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2001, 46: 1061–1079
- 12 Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinear parameterized system: a nonsmooth feedback framework. *IEEE Trans Autom Control*, 2002, 47: 757–774
- 13 Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback case. *IEEE Trans Autom Control*, 2002, 47: 1249–1266
- 14 Lin W, Pongvuthithum R. Nonsmooth adaptive stabilization of cascade systems with nonlinear parameterization via partial-state feedback. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48: 1809–1816
- 15 Lin W, Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48: 1737–1749
- 16 Qian C, Lin W. Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2006, 51: 1457–1471
- 17 Sun Z, Liu Y. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems. *Acta Autom Sin*, 2008, 34: 984–989
- 18 Sun Z, Liu Y. Adaptive state-feedback stabilization for a class of high-order nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 2007, 43: 1772–1783
- 19 Sun Z, Liu Y. Adaptive stabilization for a large class of high-order nonlinear uncertain systems. *Int J Control*, 2009, 82: 1275–1287
- 20 Li W, Xie X. Inverse optimal stabilization for stochastic nonlinear systems whose linearizations are not stabilizable. *Automatica*, 2009, 45: 498–503

## 附录 A

本部分给出正文中两个关键命题 1 和 3 的严格证明.

### A1 命题 1 的证明

由假设 1, 对任意非线性函数  $f_i, i = 1, \dots, n$ , 有

$$|f_i| \leq \theta \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| + \theta |x_{i+1}|^{q_i} \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j|. \quad (\text{A1})$$

对上不等式右端第 2 项, 利用 Young 不等式 (见脚注 1)) 以及事实  $g_i > 0$ , 可得

$$\begin{aligned} \theta |x_{i+1}|^{q_i} \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| &= \left( g_i^{\frac{q_i}{p_i}} |x_{i+1}|^{q_i} \right) \cdot \left( g_i^{-\frac{q_i}{p_i}} \theta \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| \right) \\ &\leq \frac{q_i g_i}{p_i} \varepsilon |x_{i+1}|^{p_i} + \frac{p_i - q_i}{p_i} (\varepsilon g_i)^{-\frac{q_i}{p_i - q_i}} \left( \theta \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| \right)^{\frac{p_i}{p_i - q_i}}, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

其中  $\varepsilon = \frac{p_i}{2q_i}$ . 再由假设 2, 有  $(\varepsilon g_i)^{-\frac{q_i}{p_i-q_i}} \leq a^{\frac{-q_i}{p_i-q_i}} \left(\frac{2q_i}{p_i\lambda_i}\right)^{\frac{q_i}{p_i-q_i}}$ . 进而将公式 (A2) 代入 (A1) 并注意到事实  $0 \leq q_i < p_i$ , 得到

$$\begin{aligned} |f_i| &\leq \frac{g_i}{2} |x_{i+1}|^{p_i} + \left( \theta + a^{\frac{-q_i}{p_i-q_i}} \theta^{\frac{p_i}{p_i-q_i}} \frac{p_i - q_i}{p_i} \left( \frac{2q_i}{p_i\lambda_i} \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| \right)^{\frac{q_i}{p_i-q_i}} \right) \bar{f}_i \sum_{j=1}^i |x_j| \\ &\leq \frac{g_i}{2} |x_{i+1}|^{p_i} + \bar{\theta} \varphi_i \sum_{j=1}^i |x_j|, \end{aligned} \tag{A3}$$

其中  $\bar{\theta} = \max\{1, \theta, \sum_{i=1}^n a^{\frac{-q_i}{p_i-q_i}} \theta^{\frac{p_i}{p_i-q_i}}\}$  是满足命题 1 的未知常数, 而  $\varphi_i$  是命题 1 中给定的已知非负光滑函数. 至此, 命题 1 证明完毕.

### A2 命题 3 的证明

只需给出满足公式 (16) 的非负光滑函数  $\rho_k(x_{[k]}, \hat{\theta})$  的显式形式.

首先, 由命题 1 和文献 [19] 中的引理 A.5, 易找到光滑函数  $\bar{\varphi}_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) > 0$  使得

$$|f_k(t, x, u)| \leq \frac{g_k}{2} |x_{k+1}|^{p_k} + \bar{\theta} \bar{\varphi}_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) \sum_{i=1}^k |z_i|^{1/(p_1 \cdots p_{k-1})}. \tag{A4}$$

注意到由 Young 不等式 (见脚注 1)), 有

$$\begin{aligned} z_k^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}{p_1 \cdots p_{k-1}}} \bar{\theta} \bar{\varphi}_k \sum_{i=1}^{k-1} |z_i|^{1/(p_1 \cdots p_{k-1})} &\leq \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + a^{\frac{1}{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}} (k-1) \frac{2p_1 \cdots p_{k-1} - 1}{4} \left( \frac{2\bar{\theta} \bar{\varphi}_k}{p_1 \cdots p_{k-1}} \right)^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}}{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}} z_k^2. \end{aligned} \tag{A5}$$

进而由命题 2 性质 1 中的  $\bar{\theta} \leq a\theta$  和性质 2, 公式 (16) 左端第 1 项满足

$$z_k^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}{p_1 \cdots p_{k-1}}} f_k \leq \frac{g_k}{2} |z_k|^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}{p_1 \cdots p_{k-1}}} |x_{k+1}|^{p_k} + \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + a\theta \rho_{k1}(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2, \tag{A6}$$

其中  $\rho_{k1} = (k-1) \frac{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}{4} \left( \frac{2\bar{\theta} \bar{\varphi}_k}{p_1 \cdots p_{k-1}} \right)^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-1}}{2p_1 \cdots p_{k-1}-1}} + \bar{\varphi}_k$ .

其次, 利用文献 [12] 中公式 (33) 给出的对  $\frac{\partial W_k}{\partial x_i}$  的估计, 公式 (16) 左端第 2 项满足

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i) \leq 4 |z_k| \sum_{i=1}^{k-1} \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i) \right|, \tag{A7}$$

且类似于文献 [12] 中的引理 3.5, 由假设 2, 命题 1 以及  $\alpha_i^{p_1 \cdots p_i}, i = 1, \dots, k-1$  的表达式, 不难找到光滑函数  $\tilde{\varphi}_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) > 0$  使得

$$4 \sum_{i=1}^{k-1} \left| \frac{\partial \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i) \right| \leq \bar{\theta} \tilde{\varphi}_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) \sum_{j=1}^k |z_j|. \tag{A8}$$

进而由 Young 不等式以及命题 2 性质 1 中的  $\bar{\theta}^2 \leq \theta$  和  $\bar{\theta} \leq a\theta$ , 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} (g_i x_{i+1}^{p_i} + f_i) &\leq \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + a\bar{\theta}^2 (k-1) \tilde{\varphi}_k^2(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2 + \bar{\theta} \tilde{\varphi}_k(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2 \\ &\leq \frac{1}{4a} \sum_{i=1}^{k-1} z_i^2 + a\theta \rho_{k2}(x_{[k]}, \hat{\theta}) z_k^2, \end{aligned} \tag{A9}$$

其中  $\rho_{k2} = (k-1) \tilde{\varphi}_k^2 + \tilde{\varphi}_k$ .

对公式 (16) 左端第 3 项, 首先由文献 [12] 中的引理 2.2 以及  $z_k$  的定义, 易知

$$|x_k^{p_k-1} - \alpha_{k-1}^{p_k-1}| \leq 2^{\frac{p_1 \cdots p_{k-2}-1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} |x_k^{p_1 \cdots p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_1 \cdots p_{k-1}}|^{\frac{1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} \leq 2 |z_k|^{\frac{1}{p_1 \cdots p_{k-2}}}. \tag{A10}$$

进而利用 Young 不等式和命题 2 中的性质 3, 得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} \bar{\theta} \mu_{k-1} |z_{k-1}|^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-2}-1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} |x_k^{p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_{k-1}}| \\
 & \leq 3 \bar{\theta} \mu_{k-1} |z_{k-1}|^{\frac{2p_1 \cdots p_{k-2}-1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} |z_k|^{\frac{1}{p_1 \cdots p_{k-2}}} \\
 & \leq \frac{1}{4a} z_{k-1}^2 + \frac{1}{2p_1 \cdots p_{k-2}} \left( \frac{2a(2p_1 \cdots p_{k-2} - 1)}{p_1 \cdots p_{k-2}} \right)^{2p_1 \cdots p_{k-2}-1} (3\bar{\theta} \mu_{k-1})^{2p_1 \cdots p_{k-2}} z_k^2 \\
 & \leq \frac{1}{4a} z_{k-1}^2 + a \Theta \rho_{k3}(x_{[k]}, \hat{\Theta}) z_k^2, \tag{A11}
 \end{aligned}$$

其中  $\rho_{k3} = \frac{1}{8p_1 \cdots p_{k-2}-4} (12\mu_{k-1})^{2p_1 \cdots p_{k-2}}$ .

至此, 基于公式 (A6), (A9) 和 (A11) 且选择  $\rho_k = \sum_{i=1}^3 \rho_{ki}$ , 即可直接证得命题 3.

## A new approach to adaptive control design without overparametrization for a class of uncertain nonlinear systems

ZHANG Jian & LIU YunGang\*

*School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China*

\*E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

**Abstract** This paper considers the globally stabilizing adaptive controller design for a class of more general uncertain high-order nonlinear systems with unknown control coefficients. Although the existing literature has solved the problem, for  $n$ -dimensional systems, the existing methods need at least  $n + 1$  dynamic updating laws for the unknown parameters to construct the stabilizing adaptive controller; that is, the dimension of the dynamic compensator is not less than  $n + 1$ , and therefore, there exists serious overparametrization. In this paper, by defining some new unknown parameters which need dynamic updating, also by using adding a power integrator and related adaptive technique, the overparametrization is successfully solved and a new approach is given to design stabilizing adaptive controller based on only one parameter updating law. A simulation example is finally provided to demonstrate the validness of the proposed approach.

**Keywords** high-order nonlinear systems, unknown control coefficients, overparametrization, stabilizing control design, adding a power integrator, adaptive technique