

一类具有未知增长率非线性系统全局输出反馈实际跟踪

闫雪华, 刘允刚*

山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061

* 通信作者. E-mail: lygr@sdu.edu.cn

收稿日期: 2010-03-29; 接受日期: 2010-07-08

国家自然科学基金 (批准号: 60974003)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-07-0513)、教育部科学技术研究重点项目 (批准号: 108079)、山东省优秀中青年科学家奖励基金 (批准号: 2007BS01010)、山东省杰出青年基金 (批准号: JQ200919) 和山东大学自主创新基金 (批准号: 2009JQ008) 资助项目

摘要 本文研究了一类仅跟踪误差可量测不确定非线性系统的全局输出反馈实际跟踪问题. 不同于现有文献, 该控制系统具有依赖于不可测状态的增长且增长率为未知常数, 并且只要求被跟踪信号及其一阶导数有未知界, 因此直接推广现有结果难以解决上述控制问题. 受相关镇定结果的启发, 并通过灵活运用广义控制 (universal control) 和死区 (dead zone) 的方法与技巧, 本文设计了自适应输出反馈控制器. 主要结果表明, 所设计的控制器能够确保跟踪误差经有限时间后收敛于设定的原点的任意小邻域, 同时闭环系统的所有信号皆有界. 仿真算例验证了理论结果的有效性.

关键词 不确定非线性系统 全局实际跟踪 自适应控制 输出反馈 动态高增益

1 引言

输出跟踪控制是控制理论中的一个重要问题, 并在过去几十年中得到了广泛研究^[1-16]. 至今, 最常见的输出跟踪有 3 类: 渐近输出跟踪^[1-3]、实际输出跟踪 (或称 λ -跟踪)^[5,8,10-13]、带有设定暂态行为的输出跟踪^[14-16]. 在第 1 类输出跟踪中, 为了实现所期望的跟踪误差的渐近行为, 一般要求系统和被跟踪信号满足较多条件, 如精确的系统模型. 然而, 实际控制系统中不可避免地存在未建模动态和不确定性, 故许多常见的系统不能实现渐近输出跟踪控制. 作为第 1 类的弱化情形, 第 2 类、第 3 类跟踪控制的目标是驱使跟踪误差收敛到一个设定的原点的充分小邻域, 这对很多实际应用来说已足够. 此外, 较第 1 类, 后两类跟踪控制要求更少的限制条件, 并且容许系统模型存在多种类型的不确定性和未知性. 主要基于上述原因, 后两类跟踪控制在过去的 30 年中受到了诸多关注并且至今仍是一个活跃的研究领域.

至今, 针对许多类型的非线性系统, 已实现了实际跟踪控制^[4-9,11-13]. 作为该类控制的新发展, 当所有状态均可用时, 已取得了一系列研究结果^[6-9], 特别是文献 [6] 研究了一类推广严格反馈不确定系统, 而文献 [7-9] 对高阶不确定非线性系统进行了研究. 当仅部分状态或者输出可用时, 也已取得了一些代表性成果^[11-13]. 具体地, 文献 [11] 针对一类控制系数未知和增长是未知常系数输出多项式

引用格式: 闫雪华, 刘允刚. 一类具有未知增长率非线性系统全局输出反馈实际跟踪. 中国科学: 信息科学, 2011, 41: 704-715

的非线性系统, 研究了自适应 λ -跟踪问题并给出了反推设计过程. 不同于文献 [11, 12] 进一步研究了一类具有不可测状态与有界函数乘积形式主导非线性项的系统, 给出了较文献 [11] 更为简单的实际跟踪控制器. 在被跟踪信号较文献 [11, 12] 信息更少的情况下, 文献 [13] 研究了一类增长依赖于更高阶不可测状态的非线性系统的实际跟踪问题. 值得指出的是在文献 [11, 12] 中, 调节律中均引入了死区, 不仅有效防止了突跳现象 (bursting phenomenon), 还可以直接确立所期望的跟踪目标.

本文研究了一类增长依赖于不可测状态且增长率为未知常数非线性系统的全局实际跟踪问题, 且要求被跟踪信号及其一阶导数有未知上界. 据作者所知, 该问题至今尚未解决且不能直接用现有方法来解决. 与文献 [11–13] 相比, 本文所需被跟踪信号的信息更少. 实际上, 文献 [11, 12] 要求被跟踪信号精确已知, 而文献 [13] 要求被跟踪信号与其一阶导数的上界已知. 另外, 不同于文献 [12] 中系统的主导非线性, 本文所研究系统的非线性容许更低阶增长的不可测状态, 因而更为一般. 还由于文献 [11] 中系统的增长只依赖于可测输出, 且文献 [13] 中系统的增长率是已知常数, 故本文所研究系统与文献 [11, 13] 中的有本质区别. 尽管针对满足类似但稍强约束条件的非线性系统, 文献 [17, 18] 已经研究了其渐近稳定控制问题, 但充分研究显示跟踪问题与镇定问题相差甚远, 并且更难以解决. 本文主要受文献 [12, 13, 18] 的启发, 通过综合广义控制和死区的方法以及动态高增益观测器, 成功地解决了上述实际跟踪问题.

本文的主要贡献包括两方面: 一是引入动态高增益观测器来重构系统的不可测状态. 特别是借用死区方法所设计的新的增益调节律能够有效地处理系统非线性项和被跟踪信号中的不确定性. 基于该动态高增益和观测器, 设计了自适应输出反馈控制器, 从而确保跟踪误差经有限时间后收敛于设定的原点的任意小邻域, 同时闭环系统所有信号有界. 二是不同于常用性能分析模式, 本文提出了一种新模式, 成功地克服了由新型增益调节律导致的技术困难. 这一模式不仅加深了对所得理论结果的理解, 也必将有助于解决更为一般非线性系统的实际跟踪问题. 本文其余部分组织如下. 第 2 节提出了系统模型和控制目标. 第 3 节给出了相应全局实际跟踪控制设计方案, 并总结了本文的主要结果. 第 4 节用一个数值算例验证了理论结果的正确性. 第 5 节是结束语. 正文后附录 A 给出了一个关键性引理和两个基本命题的证明, 是本文重要且必要的组成部分.

符号 本文通篇采用如下符号: \mathbb{R} 表示实数集; \mathbb{R}^+ 表示非负实数集; \mathbb{R}^n 表示 n 维实数空间. 对任意向量或矩阵 X , X^T 表示它的转置; 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1$ 表示其 1-范数, 即 $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$; $\|x\|$ 表示向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的欧式范数或 2-范数, 由其导出的矩阵 P 的范数记作 $\|P\|$; 对任意向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$.

2 系统模型和控制目标

2.1 系统模型

研究如下—类不确定非线性系统的跟踪控制问题:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} + \psi_i(t, \eta), \\ \dot{\eta}_n = u + \psi_n(t, \eta), & i = 1, \dots, n-1, \\ y = \eta_1 - y_r, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, 初始值 $\eta_0 = \eta(0)$; $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ 和 $t \mapsto y_r(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ 分别是控制输入、系统输出 (跟踪误差) 和被跟踪信号; $\psi_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ 是关于 t 连续,

关于 η 局部 Lipschitz 的未知函数. 下文中, 假定只有系统输出 y 可量测.

本文主要结果建立在系统 (1) 和被跟踪信号 y_r 满足如下假设基础之上.

假设 1 存在一个未知正常数 θ 使得对 $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \eta \in \mathbb{R}^n, |\psi_i(t, \eta)| \leq \theta(|\eta_1| + \dots + |\eta_i|) + \theta, \quad i = 1, \dots, n.$

假设 2 被跟踪信号 y_r 连续可微, 且存在未知常数 $M \geq 0$ 使得 $\sup_{t \geq 0} (|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)|) \leq M.$

注 1 由假设 1 和 2, 不难看出系统 (1) 与文献 [11-13] 中系统有本质区别. 不同于文献 [11], 系统 (1) 的非线性项强依赖于不可测状态 (假设 1 隐含), 且被跟踪信号不可用. 有别于文献 [12], 本文并不要求系统 (1) 的相对阶已知, 仅跟踪误差 (即系统 (1) 的输出) 为可量测信号 (其合理性的讨论见文献 [13]), 并且只要求被跟踪信号及其一阶导数有未知上界 (假设 2 隐含). 此外, 由假设 1 可知, 系统 (1) 容许更低阶增长的不可测状态. 尽管文献 [13] 研究了一类增长依赖于更高阶不可测状态的非线性系统, 但其增长率和被跟踪信号及其一阶导数的上界均为已知常数.

2.2 控制目标

本文的目标 (严格地讲) 是对满足假设 1 和 2 的系统 (1), 寻求如下形式的自适应输出反馈控制器:

$$\dot{\chi} = \alpha_\lambda(\chi, y), \quad u = \beta_\lambda(\chi, y), \quad (2)$$

确保 (i) 闭环系统的解在 $[0, +\infty)$ 上有定义 (well defined) 且全局有界, (ii) 对任意初始条件, 存在有限时间 $T_\lambda > 0$, 使得 $\sup_{t \geq T_\lambda} |y(t)| = \sup_{t \geq T_\lambda} |\eta_1(t) - y_r(t)| \leq \lambda$, 其中 χ 是适当维数的观测器和调节律的状态向量, 初始值 $\chi_0 = \chi(0)$, λ 是刻画跟踪精度的任意给定正常数, $\alpha_\lambda(\cdot)$ 和 $\beta_\lambda(\cdot)$ 分别是连续向量值和连续可微标量值函数.

如上描述的控制称为精度是 λ 的全局实际跟踪控制 [7-9,13], 有时也称为 λ -跟踪控制 [4,5,10-12].

3 全局输出反馈实际跟踪控制

本节将对满足假设 1 和 2 的系统 (1) 设计一跟踪控制器. 如第 2 节所述, 将显示地设计一个由全阶动态高增益观测器和自适应控制器组成的自适应输出反馈控制器.

首先引入坐标变换 $x_1 = y, x_i = \eta_i, i = 2, \dots, n.$ 则有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(t, x, y_r, \dot{y}_r), \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(t, x, y_r), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + \phi_n(t, x, y_r), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\phi_1 = \psi_1(t, x_1 + y_r, x_2, \dots, x_n) - \dot{y}_r, \phi_i = \psi_i(t, x_1 + y_r, x_2, \dots, x_n), i = 2, \dots, n.$

由假设 1 和 2, 易知对任意 $i = 1, \dots, n,$

$$|\phi_i| \leq \theta(|x_1 + y_r| + |x_2| + \dots + |x_i|) + |\dot{y}_r| + \theta \leq \theta(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_i|) + \theta_1,$$

其中 $\theta_1 = \theta(M + 1) + M > 0$ 为未知常数.

其次, 选择设计参数 $a_i > 0, k_i > 0, i = 1, \dots, n$, 使得矩阵 A, B 是 Hurwitz 的且存在 $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$ 满足

$$\begin{cases} A^T P + PA \leq -I & \text{且} & DP + PD \geq 0, \\ B^T Q + QB \leq -2I & \text{且} & DQ + QD \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $D = \text{diag}\{1, 2, \dots, n\}$,

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

借助于文献 [19] 中 Lemma 1, 易知上述设计参数的选择总是能够实现的.

至此, 针对系统 (3), 对任给的 $\lambda > 0$, 构造如下动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + L^i a_i (y - \hat{x}_1), & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n = u + L^n a_n (y - \hat{x}_1), \\ \dot{L} = \max \left\{ \frac{2(y - \hat{x}_1)^2 + 2\hat{x}_1^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{L^2}, 0 \right\}, & L(0) = 1, \end{cases} \quad (6)$$

和

$$u = -(L^n k_1 \hat{x}_1 + L^{n-1} k_2 \hat{x}_2 + \cdots + L k_n \hat{x}_n), \quad (7)$$

其中 $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$ 为观测器的状态向量, 初始值 $\hat{x}_0 = \hat{x}(0)$.

注 2 由式 (6) 或下面命题 1, 易知 $L \geq 1$. 因此, 如上设计的控制器是由全阶高增益观测器、新的增益调节律和自适应高增益控制器构成, 显然符合通式 (2). 值得指出的是, 本文主要贡献的核心是引入了新的高增益调节律, 从而能有效处理系统非线性项和被跟踪信号中的不确定性. 尽管该增益调节律的表达形式略显复杂, 但如下文定理 1 的证明所示, 这本质上是为了确保闭环系统 (由式 (1), (6), (7) 组成) 所有信号的有界性和实现全局实际跟踪.

下面的命题描述了上述动态高增益 L 的基本性质.

命题 1 由式 (6) 确定的增益 L 在其存在区间内是单调非降的, 且其动态关于 (y, \hat{x}_1, L) 是局部 Lipschitz 的.

证明 由式 (6) 知, $\dot{L} \geq 0$, 故 L 是单调非降的, 且对于存在区间内的任意时间 t , 有 $L(t) \geq L(0) = 1$. 由此, $\frac{2(y - \hat{x}_1)^2 + 2\hat{x}_1^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{L^2}$ 是关于 (y, \hat{x}_1, L) 的光滑函数. 从而可证 \dot{L} 关于 (y, \hat{x}_1, L) 是局部 Lipschitz 的. 实际上, 对某邻域内的任意两点 (y', \hat{x}'_1, L') 和 (y'', \hat{x}''_1, L'') , 易得

$$\begin{aligned} |\dot{L}' - \dot{L}''| &\leq \left| \frac{2(y' - \hat{x}'_1)^2 + 2(\hat{x}'_1)^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{(L')^2} - \frac{2(y'' - \hat{x}''_1)^2 + 2(\hat{x}''_1)^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{(L'')^2} \right| \\ &\leq N(|y' - y''| + |\hat{x}'_1 - \hat{x}''_1| + |L' - L''|), \end{aligned}$$

其中 N 是与所选邻域有关的适当正常数.

由命题 1, 易验证闭环系统的右边函数连续, 且在初始条件的某开邻域内关于 (η, \hat{x}, L) 是局部 Lipschitz 的, 因而该闭环系统在某小区间 $[0, t_s)$ 上存在唯一解 (见文献 [20] 第 18 页 Theorem 3.1). 设

$[0, t_f)$ 为该唯一解的最大存在区间, 其中 $0 < t_f \leq +\infty$ (见文献 [20] 第 17 页 Theorem 2.1). 如果能够证明 $t_f = +\infty$, 则闭环系统的解在 $[0, +\infty)$ 上有定义.

在给出本文主要结果之前, 先给出两个基本命题 (其证明见正文后附录 A). 具体地, 命题 2 借助 Lyapunov 候选函数刻画了闭环系统的动态行为. 需强调的是命题 2 中不等式 (8) 右边最后项关于 L 的次数 “-2” 是确保 L 有界性的关键 (见附录 A3 引理 1 的证明). 命题 3 揭示了高增益 L 与其他系统变量间的内在联系, 由此易知要证闭环系统所有信号有界, 只须证 L 有界即可.

命题 2 定义 $e_i = x_i - \hat{x}_i$, $\varepsilon_i = \frac{e_i}{L^i}$, $z_i = \frac{\dot{x}_i}{L^i}$, $i = 1, \dots, n$, 并记 $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T$, $z = [z_1, \dots, z_n]^T$. 则存在正常数 γ 和 Θ 使得 $V(\varepsilon, z) = \gamma V_1(\varepsilon) + V_2(z) := \gamma \varepsilon^T P \varepsilon + z^T Q z$ 在区间 $[0, t_f)$ 上, 满足

$$\dot{V} \leq -(L - \Theta)(\|\varepsilon\|^2 + \|z\|^2) + \frac{\Theta}{L^2}, \tag{8}$$

其中 P 和 Q 为满足式 (5) 的对称正定矩阵.

命题 3 对所得闭环系统, 若 L 在 $[0, t_f)$ 上有界, 则 z 和 ε 在 $[0, t_f)$ 上也有界.

本文的主要结果概括在如下定理中.

定理 1 考虑满足假设 1 和 2 的系统 (1). 若设计参数 $a_i, k_i, i = 1, \dots, n$ 的选择确保命题 2 的结论成立, 则基于动态高增益观测器 (6) 的输出反馈控制器 (7) 使得对任意初始条件, 闭环系统的解在 $[0, +\infty)$ 上有定义且有界, 并且可实现全局实际跟踪 (精度为 λ), 即对任给的 $\lambda > 0$, 存在有限时间 T_λ , 使得 $|y(t)| \leq \lambda, \forall t \geq T_\lambda$.

证明 为证明闭环系统解的有界性, 有必要先证 $t_f = +\infty$, 从而闭环系统的解在 $[0, +\infty)$ 上存在且唯一, 再基于反证法证明 L 的有界性, 进而由命题 3 可得闭环系统解的有界性. 事实上, 定理的第 1 个论断由下面关键性引理直接得到, 此外为紧凑起见, 该引理的翔实证明见附录 A3.

引理 1 对具有适当设计参数的定理 1 中所给闭环系统, $t_f = +\infty$ 且所有状态在 $[0, +\infty)$ 上有界.

下面证明定理的第 2 个论断, 即对任给的 $\lambda > 0$, 存在有限时间 T_λ , 使得 $|y(t)| \leq \lambda, \forall t \geq T_\lambda$. 易知 L 连续可微, 且由 L 在 $[0, +\infty)$ 上的单调非降性和有界性知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t)$ 存在. 由式 (3), (6) 及 y, \hat{x}_1, L 在 $[0, +\infty)$ 上的有界性, 可得 \dot{y} (即 \dot{x}_1), $\dot{\hat{x}}_1$ 和 \dot{L} 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 故 \dot{L} 中函数 $[(2(y - \hat{x}_1)^2 + 2\hat{x}_1^2 - \frac{\lambda^2}{2})/L^2]$ 在 $[0, +\infty)$ 上导数有上界 (记作 N_1), 从而可证 \dot{L} 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致连续. 实际上, 对 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2N_1}$, 则对 $[0, +\infty)$ 内的任意两点 t_1, t_2 , 当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\dot{L}(t_1) - \dot{L}(t_2)| &\leq \left| \frac{2(y(t_1) - \hat{x}_1(t_1))^2 + 2\hat{x}_1^2(t_1) - \frac{\lambda^2}{2}}{L^2(t_1)} - \frac{2(y(t_2) - \hat{x}_1(t_2))^2 + 2\hat{x}_1^2(t_2) - \frac{\lambda^2}{2}}{L^2(t_2)} \right| \\ &\leq N_1 |t_1 - t_2| < \epsilon. \end{aligned}$$

至此, 根据 Barbălat 引理¹⁾, 可得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{L}(t) = 0$. 即对任意的 η_0 和 \hat{x}_0 , 存在有限时间 $T_\lambda > 0$, 使得当 $t > T_\lambda$ 时, 有 $[(2(y(t) - \hat{x}_1(t))^2 + 2\hat{x}_1^2(t) - \frac{\lambda^2}{2})/L^2(t)] \leq \dot{L}(t) \leq \frac{\lambda^2}{2L^2(t)}$, 这意味着 $|y(t)| = |\eta_1(t) - y_r(t)| \leq \lambda, \forall t > T_\lambda$.

1) Barbălat 引理: 设 $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为一阶连续可微, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时有极限, 则如果 $\dot{\omega}(t), t \in [0, +\infty)$ 一致连续, 那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\omega}(t) = 0$. Barbălat 引理的其他基本或变形形式, 读者可以参考文献 [21]

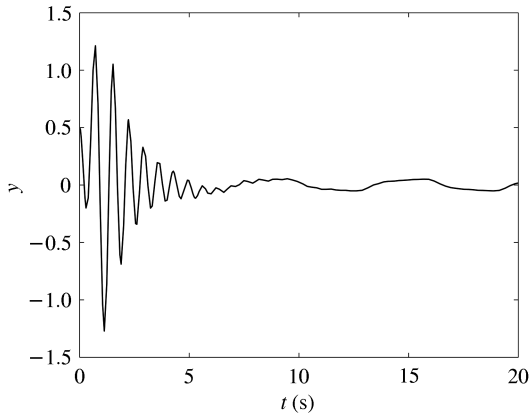


图 1 跟踪误差 y 的轨迹

Figure 1 The trajectory of tracking error y

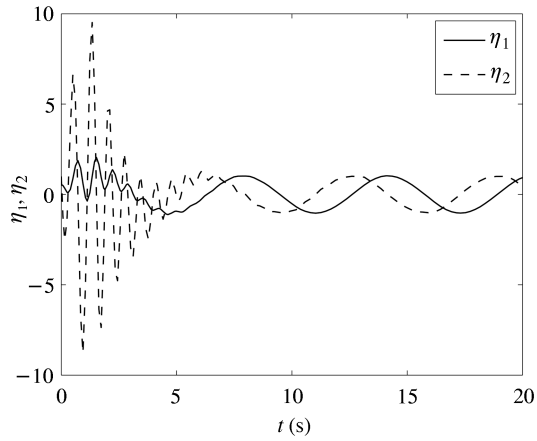


图 2 系统状态 η_1 和 η_2 的轨迹

Figure 2 The trajectories of system states η_1 and η_2

4 仿真算例

本节给出一个数值算例, 来验证理论结果的正确性和有效性. 考虑如下二阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = u - \theta \text{sign}(\eta_2)(1 + |\eta_2|), \\ y = \eta_1 - y_r, \end{cases}$$

其中 $\text{sign}(\cdot)$ 表示符号函数, 即当 $\eta_2 > 0 (< 0)$ 时, $\text{sign}(\eta_2) = 1 (= -1)$, 当 $\eta_2 = 0$ 时, $\text{sign}(\eta_2) = 0$; y_r 是被跟踪信号. 假设 $\theta = 0.5$, $y_r = \sin(t)$.

直接应用第 3 节给出的控制设计方法, 得到如下自适应输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + La_1(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = u + L^2a_2(y - \hat{x}_1), \\ \dot{L} = \max \left\{ \frac{2(y - \hat{x}_1)^2 + 2\hat{x}_1^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{L^2}, 0 \right\}, \quad L(0) = 1, \end{cases}$$

和 $u = -(L^2k_1\hat{x}_1 + Lk_2\hat{x}_2)$, 其中 $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $k_1 = 12$, $k_2 = 1$. 可以验证, 设计参数 a_1 , a_2 和 k_1 , k_2 的选择是合适的. 因为对给定的设计参数, 通过求解矩阵不等式 (5), 可以得到所需的对称正定矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 5.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 0.6000 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 13.0833 & 0.0833 \\ 0.0833 & 1.0833 \end{bmatrix},$$

并进而由命题 2 的证明 (见附录 A1) 找到合适的正常数 γ 和 Θ .

设跟踪精度 $\lambda = 0.1$, 并且初始值 $\eta_1(0) = 0.5$, $\eta_2(0) = 1$, $\hat{x}_1(0) = 2$, $\hat{x}_2(0) = -3$, 通过计算机仿真, 得到图 1-5. 从这些图中可以看出闭环系统的所有信号是有界的, 并且图 1 显示, 在约 7 s 后, 跟踪误差满足 $|y| = |\eta_1 - y_r| \leq 0.1$, 即实现了既定的实际跟踪控制目标.

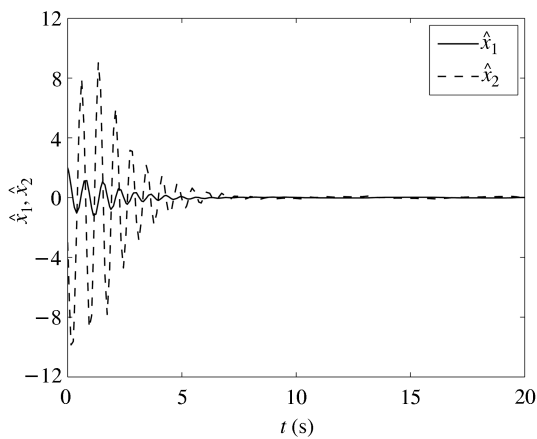


图 3 观测器状态 \hat{x}_1 和 \hat{x}_2 的轨迹

Figure 3 The trajectories of observer states \hat{x}_1 and \hat{x}_2

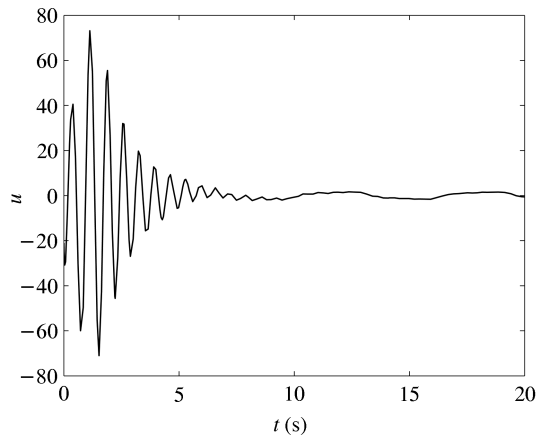


图 4 系统控制输入 u 的轨迹

Figure 4 The trajectory of control input u

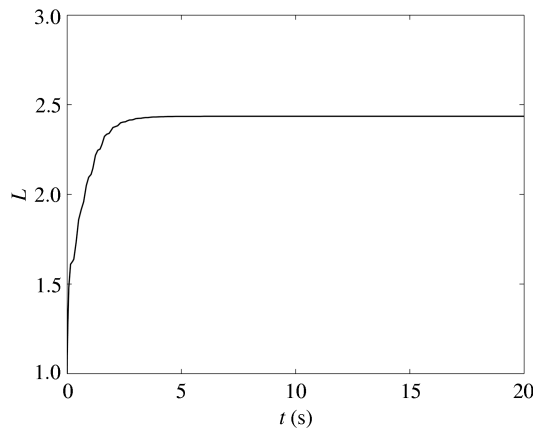


图 5 高增益 L 的轨迹

Figure 5 The trajectory of high-gain L

5 结论

本文在更弱条件下研究了一类不确定非线性系统的全局输出反馈实际跟踪问题. 通过灵活运用死区方法与广义控制理论中的技巧, 成功设计了可实现设定跟踪精度的自适应输出反馈控制器. 需指出的是, 为解决本文的控制问题, 引入了新的有死区的高增益调节律, 提出了性能分析的新模式. 后续研究工作将在本文主要思想和结果基础上, 解决其他类型不确定非线性系统, 如控制系数未知非线性系统的实际跟踪问题.

参考文献

- 1 Pan Z G, Başar T. Adaptive controller design for tracking and disturbance attenuation in parametric strict-feedback nonlinear systems. IEEE Trans Automat Contr, 1998, 43: 1066–1083
- 2 Jiang Z P. Decentralized and adaptive nonlinear tracking large-scale systems via output feedback. IEEE Trans Automat Contr, 2000, 45: 2122–2128

- 3 Krishnamurthy P, Khorrami F, Jiang Z P. Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form. *IEEE Trans Automat Contr*, 2002, 47: 814–819
- 4 Ryan E P. A nonlinear universal servomechanism. *IEEE Trans Automat Contr*, 1994, 39: 753–761
- 5 Ilchmann A, Ryan E P. Universal λ -tracking for nonlinearly-perturbed systems in the presence of noise. *Automatica*, 1994, 30: 337–346
- 6 Ye X D, Ding Z T. Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *Syst Contr Lett*, 2001, 42: 1–10
- 7 Qian C J, Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2002, 47: 21–35
- 8 Lin W, Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2003, 48: 1737–1749
- 9 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems. *Acta Automat Sin*, 2008, 34: 984–989
- 10 Mareels I M Y. A simple self-tuning controller for stably invertible systems. *Syst Contr Lett*, 1984, 4: 5–16
- 11 Ye X D. Universal λ -tracking for nonlinearly-perturbed systems without restrictions on the relative degree. *Automatica*, 1999, 35: 109–119
- 12 Bullinger E, Allgöwer F. Adaptive λ -tracking for nonlinear higher relative degree systems. *Automatica*, 2005, 41: 1191–1200
- 13 Gong Q, Qian C J. Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback. *Automatica*, 2007, 43: 184–189
- 14 Miller D E, Davison E J. An adaptive controller which provides an arbitrarily good transient and steady-state response. *IEEE Trans Automat Contr*, 1991, 36: 68–81
- 15 Ilchmann A, Ryan E P, Sangwin C J. Tracking with prescribed transient behaviour. *ESAIM Contr Optim Calc Var*, 2002, 7: 471–493
- 16 Ilchmann A, Ryan E P, Townsend P. Tracking with prescribed transient behavior for nonlinear systems of known relative degree. *SIAM J Contr Optim*, 2007, 46: 210–230
- 17 Qian C J, Schrader C B, Lin W. Global regulation of a class of uncertain nonlinear systems using time-varying output feedback. In: *Proceedings of 2003 American Control Conference*. Denver, 2003. 1542–1547
- 18 Lei H, Lin W. Universal adaptive control of nonlinear systems with unknown growth rate by output feedback. *Automatica*, 2006, 42: 1783–1789
- 19 Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. *Syst Contr Lett*, 2004, 53: 107–116
- 20 Hale J K. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. New York: Krieger, 1980
- 21 Min Y Y, Liu Y G. Barbălat lemma and its application in analysis of system stability (in Chinese). *J Shandong Univ (Engin Sci)*, 2007, 37: 51–55

附录 A

本部分给出了正文中基本命题 2 与 3 和关键性引理 1 的严格证明, 将其集中于此, 是为了避免因篇幅过长影响正文的紧凑性.

A1 命题 2 的证明

由式 (3), (6) 和 e_i, ε_i, z_i 的定义, 可得如下动态方程:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - La_1 e_1 + \phi_1(t, x, y_r, \dot{y}_r), \\ \dot{e}_i = e_{i+1} - L^i a_i e_1 + \phi_i(t, x, y_r), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_n = -L^n a_n e_1 + \phi_n(t, x, y_r), \end{cases} \quad (\text{A1})$$

和

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = LA\varepsilon + \Phi(t, x, y_r, \dot{y}_r, L) - \frac{\dot{L}}{L} D\varepsilon, \\ \dot{z} = LBz + La\varepsilon_1 - \frac{\dot{L}}{L} Dz, \end{cases} \quad (\text{A2})$$

其中 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\Phi = [\frac{1}{L}\phi_1(t, x, y_r, \dot{y}_r), \frac{1}{L^2}\phi_2(t, x, y_r), \dots, \frac{1}{L^n}\phi_n(t, x, y_r)]^T$; $a = [a_1, \dots, a_n]^T$; A, B, D 和式 (5) 中的一样.

对系统 (A2), 选取 Lyapunov 函数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$V(\varepsilon, z) = \gamma V_1(\varepsilon) + V_2(z), \tag{A3}$$

其中 $\gamma = \|Qa\|^2 + 1$, $V_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2$ 的定义如下:

$$V_1(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon, \quad V_2(z) = z^T Q z.$$

则在区间 $[0, t_f]$ 上, 沿着 (A2) 的解并应用矩阵不等式 (5), V 的导数满足

$$\dot{V} \leq -L\gamma\|\varepsilon\|^2 - \gamma \frac{\dot{L}}{L} \varepsilon^T (DP + PD) \varepsilon - 2L\|z\|^2 - \frac{\dot{L}}{L} z^T (DQ + QD) z + 2\gamma \varepsilon^T P \Phi + 2L\varepsilon_1 z^T Q a.$$

进而由关系式 (5) 及在 $[0, t_f]$ 上 $\dot{L} \geq 0, L \geq 1$, 易得

$$\dot{V} \leq -L\gamma\|\varepsilon\|^2 - 2L\|z\|^2 + 2\gamma \varepsilon^T P \Phi + 2L\varepsilon_1 z^T Q a. \tag{A4}$$

对上式最后一项, 由完全平方公式, 可得 $2L\varepsilon_1 z^T Q a \leq L\|z\|^2 + L\|Qa\|^2\|\varepsilon\|^2$. 此外, 注意到

$$\left| \frac{\phi_i}{L^i} \right| \leq \frac{\theta}{L^i} (|\hat{x}_1| + \dots + |\hat{x}_i| + |e_1| + \dots + |e_i|) + \frac{\theta_1}{L^i} \leq \theta\sqrt{n}(\|z\| + \|\varepsilon\|) + \frac{\theta_1}{L^i}.$$

因而式 (A4) 右边第 3 项满足

$$\begin{aligned} |2\gamma \varepsilon^T P \Phi| &\leq 4\theta\gamma n \|P\| \|\varepsilon\| \cdot (\|z\| + \|\varepsilon\|) + 4\gamma\sqrt{n} \|P\| \|\varepsilon\| \cdot \frac{\theta_1}{L} \\ &\leq 6\theta\gamma n \|P\| (\|\varepsilon\|^2 + \|z\|^2) + \frac{4\theta_1^2 \gamma \|P\|}{\theta L^2}. \end{aligned}$$

从而在 $[0, t_f]$ 上, 由式 (A4) 得

$$\dot{V} \leq -(L - 6\theta\gamma n \|P\|) (\|\varepsilon\|^2 + \|z\|^2) + \frac{4\theta_1^2 \gamma \|P\|}{\theta L^2}. \tag{A5}$$

令 $\Theta = \max\{6\theta\gamma n \|P\|, \frac{4\theta_1^2 \gamma \|P\|}{\theta}\}$. 则式 (A5) 即为式 (8), 命题 2 证明完毕.

A2 命题 3 的证明

注意到 L 在区间 $[0, t_f]$ 上单调非降、连续且有界, 故 $L(t_f) = \sup_{0 \leq t < t_f} L(t)$. 下面先证明 z 在 $[0, t_f]$ 上的有界性. 对式 (A2) 中子系统 z , 考虑函数 $V_2(z) = z^T Q z$. 通过简单计算, 在 $[0, t_f]$ 上, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -L\|z\|^2 + \|Qa\|^2 L \varepsilon_1^2 \\ &\leq -\|z\|^2 + \|Qa\|^2 L \left(2\varepsilon_1^2 + 2z_1^2 - \frac{\lambda^2}{2L^2} \right) + \|Qa\|^2 \lambda^2 \\ &\leq -\mu V_2 + \|Qa\|^2 L(t_f) \dot{L} + \|Qa\|^2 \lambda^2, \end{aligned} \tag{A6}$$

其中 $\mu = \frac{1}{\lambda_{\max}(Q)}$. 则由式 (A6), 可得

$$\frac{d}{dt} (e^{\mu t} V_2(z(t))) \leq \|Qa\|^2 L(t_f) e^{\mu t} \dot{L}(t) + \|Qa\|^2 \lambda^2 e^{\mu t}, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

上式两边分别积分, 可得

$$\begin{aligned} e^{\mu t} V_2(z(t)) &\leq V_2(z(0)) + \|Qa\|^2 L(t_f) \int_0^t e^{\mu t} dL(t) + \|Qa\|^2 \lambda^2 \int_0^t e^{\mu t} dt \\ &\leq V_2(z(0)) + \|Qa\|^2 L^2(t_f) e^{\mu t} + \|Qa\|^2 \lambda^2 \lambda_{\max}(Q) e^{\mu t}, \quad \forall t \in [0, t_f], \end{aligned}$$

从而对 $\forall t \in [0, t_f], \|z(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)} (z^T(0) Q z(0) + \|Qa\|^2 L^2(t_f) + \|Qa\|^2 \lambda^2 \lambda_{\max}(Q))$. 这说明 z 在 $[0, t_f]$ 上有界.

下面证明 ε 在 $[0, t_f]$ 上是有界的. 为此, 引入坐标变换 $\xi_i = \frac{e_i}{(L^*)^i}, i = 1, \dots, n$, 其中 L^* 为满足下式的常数,

$$L^* \geq \max\{L(t_f), 6\theta n \|P\| + 3\}. \tag{A7}$$

则在新坐标下, 误差系统 (A1) 转化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= L^* \xi_2 - L^* a_1 \xi_1 + L^* a_1 \xi_1 - L a_1 \xi_1 + \frac{\phi_1(t, x, y_r, \dot{y}_r)}{L^*}, \\ \dot{\xi}_i &= L^* \xi_{i+1} - L^* a_i \xi_1 + L^* a_i \xi_1 - L \left(\frac{L}{L^*}\right)^{i-1} a_i \xi_1 + \frac{\phi_i(t, x, y_r)}{(L^*)^i}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n &= -L^* a_n \xi_1 + L^* a_n \xi_1 - L \left(\frac{L}{L^*}\right)^{n-1} a_n \xi_1 + \frac{\phi_n(t, x, y_r)}{(L^*)^n}, \end{aligned}$$

也可写成如下紧凑形式:

$$\dot{\xi} = L^* A \xi + L^* a \xi_1 - L \Gamma a \xi_1 + \Phi^*(t, x, y_r, \dot{y}_r), \tag{A8}$$

其中 $\Gamma = \text{diag}\{1, \frac{L}{L^*}, \dots, (\frac{L}{L^*})^{n-1}\}$, $\Phi^* = [\frac{\phi_1(t, x, y_r, \dot{y}_r)}{L^*}, \frac{\phi_2(t, x, y_r)}{(L^*)^2}, \dots, \frac{\phi_n(t, x, y_r)}{(L^*)^n}]^T$.

沿着式 (A8) 的解, 函数 $V_3(\xi) = \xi^T P \xi$ 在 $[0, t_f]$ 上满足 $\dot{V}_3 \leq -L^* \|\xi\|^2 + 2\xi_1 L^* a^T P \xi - 2\xi_1 L a^T \Gamma P \xi + 2\Phi^{*T} P \xi$. 由完全平方公式, 上式右边第 2、第 3 项满足

$$|2\xi_1 L^* a^T P \xi| \leq L^{*2} \|a^T P\|^2 \xi_1^2 + \|\xi\|^2, \quad |2\xi_1 L a^T \Gamma P \xi| \leq L^2 \|a^T \Gamma P\|^2 \xi_1^2 + \|\xi\|^2. \tag{A9}$$

此外, 由 ε_i, ξ_i 的定义和式 (4) 及 (A7), 可得

$$\left| \frac{\phi_i}{(L^*)^i} \right| \leq \theta \sqrt{n} (\|z\| + \|\xi\|) + \frac{\theta_1}{L^i}, \quad |2\Phi^{*T} P \xi| \leq 6\theta n \|P\| (\|\xi\|^2 + \|z\|^2) + 4\|P\| \theta_1^2 / \theta,$$

由此及式 (A7) 与 (A9), 可知在 $[0, t_f]$ 上, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -(L^* - 6\theta n \|P\| - 2) \|\xi\|^2 + 6\theta n \|P\| \|z\|^2 + (L^{*2} \|a^T P\|^2 + L^2 \|a^T \Gamma P\|^2) \xi_1^2 + 4\|P\| \theta_1^2 / \theta \\ &\leq -\|\xi\|^2 + \theta_2 \|z\|^2 + \theta_2 \varepsilon_1^2 + \theta_2 \\ &\leq -\|\xi\|^2 + \theta_2 \left(\sup_{0 \leq t < t_f} \|z(t)\| \right)^2 + \theta_2 \left(2\varepsilon_1^2 + 2z_1^2 - \frac{\lambda^2}{2L^2} \right) + \theta_2 \lambda^2 + \theta_2 \\ &\leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} V_3 + \theta_2 \dot{L} + \theta_2 \left(\sup_{0 \leq t < t_f} \|z(t)\| \right)^2 + \theta_2 \lambda^2 + \theta_2, \end{aligned}$$

其中 $\theta_2 = \max\{6\theta n \|P\|, L^{*2} \|a^T P\|^2 + L^2 (t_f) \|a^T \Gamma P\|^2, 4\|P\| \theta_1^2 / \theta\}$. 进而类似于 z 有界性的证明, 易得

$$\|\xi(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left(\theta_2 \left(\sup_{0 \leq t < t_f} \|z(t)\| \right)^2 + \lambda^2 + 1 \right) \lambda_{\max}(P) + \xi^T(0) P \xi(0) + \theta_2 L(t_f), \quad \forall t \in [0, t_f].$$

由此及 ε_i, ξ_i 的定义和 z 的有界性 (已证), ε 在 $[0, t_f]$ 上的有界性得证.

A3 引理 1 的证明

将基于式 (8), 并通过灵活运用反证法, 来证明该引理. 由 $x_i, e_i, \varepsilon_i, z_i$ 及 u 的定义可知, 要证明闭环系统所有信号在 $[0, t_f]$ 上的有界性, 只须证明 (ε, z, L) 在该区间上的有界性即可. 整个证明分两大部分. 第一部分证明 $t_f = +\infty$, 从而闭环系统解的存在区间为 $[0, +\infty)$. 第二部分证明闭环系统所有信号在 $[0, +\infty)$ 上均有界.

(1) $t_f = +\infty$.

利用反证法来证 $t_f = +\infty$. 假设 t_f 有限, 则必有下面两种情形之一: (1) L 在 $[0, t_f]$ 上有界; (2) L 在 $[0, t_f]$ 上无界.

对情形 (1), 由命题 3, 可得 ε, z 在 $[0, t_f]$ 上均有界. 然而, 由于最大存在区间 $[0, t_f]$ 是有限区间 (由假设) 且 L 在 $[0, t_f]$ 上有界, 故 ε, z 中至少有一个在 $[0, t_f]$ 上无界, 矛盾. 从而情形 (1) 不可能.

对情形 (2), 由命题 1, L 是单调非降函数. 因而存在有限时间 $t^* \in (0, t_f)$, 使得 $L(t) \geq \Theta + 1, \forall t \in [t^*, t_f]$. 由此, 在有限区间 $[t^*, t_f]$ 上, 式 (8) 变为 $\dot{V} \leq -(\|\varepsilon\|^2 + \|z\|^2) + \Theta \leq -\mu_1 V + \Theta$, 其中 $\mu_1 = \frac{1}{\max\{\gamma \lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(Q)\}}$. 这意味着 ε 及 z 在 $[t^*, t_f]$ 上是有界的. 进而在有限区间 $[t^*, t_f]$ 上对 $\dot{L} = \max\{2\varepsilon_1^2 + 2z_1^2 - \frac{\lambda^2}{2L^2}, 0\}$ 两边积分可得 $+\infty = L(t_f) - L(t^*) = \int_{t^*}^{t_f} \dot{L}(t) dt \leq \int_{t^*}^{t_f} (2\varepsilon_1^2(t) + 2z_1^2(t)) dt < +\infty$. 该矛盾说明情形 (2) 也不可能.

上面两种情况导致的矛盾说明所做假设 t_f 有限不可能, 故 $t_f = +\infty$.

(2) 闭环系统所有信号在 $[0, +\infty)$ 上的有界性.

如上所述, 只须证明 (ε, z, L) 在 $[0, +\infty)$ 上的有界性. 进而由命题 3, 只要证明 L 在该区间上的有界性即可.

假设 L 在 $[0, +\infty)$ 上无界, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = +\infty$. 则由于 L 为连续、单调非降函数, 必存在有限时间 $T_\sigma \in (0, +\infty)$, 使得

$$L(t) \geq \Theta + \frac{1}{\sigma\mu_1}, \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty), \tag{A10}$$

其中 $\sigma \leq 1$ 为任意正常数. 从而在 $[T_\sigma, +\infty)$ 上, 式 (8) 变为

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\sigma\mu_1} (\|\varepsilon\|^2 + \|z\|^2) + \frac{\Theta}{L^2} \leq -\frac{1}{\sigma} V + \frac{\Theta}{L^2}.$$

将上式两边同乘以 $e^{\frac{1}{\sigma}t}$, 得到

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{1}{\sigma}t} V(t)) \leq \frac{\Theta}{L^2(t)} e^{\frac{1}{\sigma}t}, \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty). \tag{A11}$$

对式 (A11) 两边积分后, 可得

$$V(t) \leq e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)} V(T_\sigma) + \frac{\sigma\Theta}{L^2(T_\sigma)}, \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty). \tag{A12}$$

这意味着 V 在 $[T_\sigma, +\infty)$ 上是有界的. 又由 (A10), 可知 T_σ 随着 σ 的减小而增大, 从而有 $T_\sigma \geq T_1, \forall \sigma \in (0, 1]$, 并记 $\sigma = 1$ 时的 T_σ 为 T_1 . 进而由式 (A12) 得 $V(T_\sigma) \leq V(T_1) + \Theta$, 以及

$$V(t) \leq e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)} (V(T_1) + \Theta) + \frac{\sigma\Theta}{L^2(T_\sigma)}, \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty). \tag{A13}$$

下面, 将找到某有限时刻, 使得在此时刻 $2(y - \hat{x}_1)^2 + 2\hat{x}_1^2$ 进入区间 $[0, \frac{\lambda^2}{2}]$ 且此后不再从中逃逸. 为此, 将通过寻找充分小的 $\sigma > 0$ 使得由其确定的某时刻后式 (A13) 右边两项都适当小, 且 L 不再增加.

首先, 由式 (6), (A3) 及 (A13), 可得

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= \max \left\{ 2\varepsilon_1^2(t) + 2z_1^2(t) - \frac{\lambda^2}{2L^2(t)}, 0 \right\} \leq \max \{ \mu_2 V(t), 0 \} \\ &\leq \mu_2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta), \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty), \end{aligned}$$

其中 $\mu_2 = \frac{2}{\min\{\gamma\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(Q)\}}$. 上式两边积分后得到

$$L(t) \leq \mu_2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)(t - T_\sigma) + L(T_\sigma), \quad \forall t \in [T_\sigma, +\infty). \tag{A14}$$

若 $\sigma > 0$ 充分小, 则易于验证, 当

$$t \geq T := T_\sigma + \sigma \ln \frac{16\mu_2 L^2(T_\sigma)(V(T_1) + \Theta)}{\lambda^2 - 32\sigma^2 \mu_2^3 (V(T_1) + \Theta)(V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)^2} > T_\sigma,$$

时, 有

$$16\mu_2 e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)} (V(T_1) + \Theta) (2\mu_2^2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)^2 \sigma^2 e^{\frac{1}{\sigma}(t-T_\sigma)} + L^2(T_\sigma)) \leq \lambda^2.$$

由此以及 $\frac{v^2}{2} < e^v, \forall v \geq 0$, 易知

$$e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)} (V(T_1) + \Theta) \leq \frac{\lambda^2}{8\mu_2 (\mu_2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)(t - T_\sigma) + L(T_\sigma))^2}, \quad \forall t \geq T. \tag{A15}$$

进而由 (A14), (A13) 右边第 1 项满足

$$e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)} (V(T_1) + \Theta) \leq \frac{\lambda^2}{8\mu_2 L^2(t)}, \quad \forall t \geq T. \tag{A16}$$

对式 (A13) 右边第 2 项, 由式 (A14), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\Theta}{L^2(T_\sigma)} &= \frac{\sigma\Theta L^2(T)}{L^2(T_\sigma)L^2(T)} \leq \frac{\sigma\Theta \left(\mu_2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta) \sigma \ln \frac{16\mu_2 L^2(T_\sigma)(V(T_1) + \Theta)}{\lambda^2 - 32\sigma^2 \mu_2^3 (V(T_1) + \Theta)(V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)^2} + L(T_\sigma) \right)^2}{L^2(T_\sigma)L^2(T)} \\ &\leq \frac{\sigma\Theta \left(\frac{\sigma\mu_2 (V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)}{L(T_\sigma)} \ln \frac{16\mu_2 L^2(T_\sigma)(V(T_1) + \Theta)}{\lambda^2 - 32\sigma^2 \mu_2^3 (V(T_1) + \Theta)(V(T_1) + (\sigma + 1)\Theta)^2} + 1 \right)^2}{L^2(T)}. \end{aligned} \tag{A17}$$

显然, 该式右边的分子当 σ 充分小时小于任意给定正数.

综上所述, 对任给的正常数 λ , 只要 σ 充分小, 就有

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sigma}(T_\sigma-t)}(V(T_1) + \Theta) \leq \frac{\lambda^2}{8\mu_2 L^2(t)}, & \forall t \geq T, \\ \frac{\sigma\Theta}{L^2(T_\sigma)} \leq \frac{\lambda^2}{8\mu_2 L^2(T)}. \end{cases} \quad (\text{A18})$$

进而由式 (A13) 和 L 的非降性得到 $V(t) \leq \frac{\lambda^2}{4\mu_2 L^2(T)}, \forall t \geq T$. 由此及式 (A3) 可得

$$2\varepsilon_1^2(t) + 2z_1^2(t) \leq \mu_2 V(t) \leq \frac{\lambda^2}{4L^2(T)} < \frac{\lambda^2}{2L^2(T)}, \quad \forall t \geq T. \quad (\text{A19})$$

下面将基于 σ 充分小, 使得式 (A15)–(A19) 成立前提下导出矛盾.

易于验证, 闭环系统的解在 $[0, +\infty)$ 上是连续的. 再由假设 $L(+\infty) = +\infty$ 可知存在有限时间 $T' > T$, 使得 $L(T') > L(T)$. 从而由 (A19) 和 \dot{L} 的表达式, 在区间 $(T, T']$ 上必存在某些满足 $2\varepsilon_1^2 + 2z_1^2 - \frac{\lambda^2}{2L^2} = 0$ 的有限时间. 在这些有限时间中, T'' 表示第 1 个有限时间. 因而有

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1^2(T'') + 2z_1^2(T'') = \frac{\lambda^2}{2L^2(T'')}, \\ 2\varepsilon_1^2(t) + 2z_1^2(t) < \frac{\lambda^2}{2L^2(t)}, \quad \forall t \in [T, T''). \end{cases} \quad (\text{A20})$$

由上式第 2 个关系式和 \dot{L} 的表达式 (6) 可知 $\dot{L}(t) \equiv 0, \forall t \in [T, T'')$, 再由 L 的连续性, 有 $L(T'') = L(T)$. 由此及 (A19) 易知 $2\varepsilon_1^2(T'') + 2z_1^2(T'') < \frac{\lambda^2}{2L^2(T'')}$, 与式 (A20) 第 1 个关系式矛盾, 故 L 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的.

最后由命题 3 直接得到 z 及 ε 在 $[0, +\infty)$ 上的有界性. 注意到 z 及 ε 的定义, 可知 x, \hat{x} 在 $[0, +\infty)$ 上是有界的, 进而由假设 2 得到 η 的有界性. 此外, 由式 (7) 易知, 控制输入 u 在 $[0, +\infty)$ 上也是有界的. 至此, 闭环系统所有信号在 $[0, +\infty)$ 上的有界性证毕.

Global practical tracking by output-feedback for nonlinear systems with unknown growth rate

YAN XueHua & LIU YunGang*

School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China

*E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

Abstract This paper is devoted to the global practical tracking by output-feedback for a class of uncertain nonlinear systems with only the tracking error measurable. Different from the closely related works, the systems have unmeasured states dependent growth with unknown constant rate, and the reference signal, as well as its first order derivative, has unknown bound. Mainly because of these, the tracking problem can hardly be solved by straightforwardly extending the existing results. In the paper, motivated by the related stabilization results, and flexibly using the ideas of universal control and dead zone, an adaptive output-feedback controller is designed to make the tracking error prescribed arbitrarily small after a finite time while keeping all the states of the closed-loop system bounded. A numerical example demonstrates the effectiveness of the theoretical results.

Keywords uncertain nonlinear systems, global practical tracking, adaptive control, output-feedback, dynamic high-gain