



三次样条 Hermite 插值基构造四边形薄板单元

献给徐利治教授 95 华诞

陈娟^①, 李崇君^{②*}

① 东北财经大学数学与数量经济学院, 大连 116025;

② 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

E-mail: chenjdufe@163.com, chongjun@dlut.edu.cn

收稿日期: 2015-01-21; 接受日期: 2015-03-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11290143, 11471066 和 11102037) 资助项目

摘要 薄板弯曲单元被广泛地应用到工程问题的有限元计算中. 然而, 由于协调的薄板弯曲位移型单元要求挠度和转角 (即位移的函数值和导数值) 都是连续的, 导致很难直接构造协调的位移型薄板单元. 在数学上, 样条是满足一定协调性的分片光滑的多项式, 有限元的形函数可以视为样条函数. 本文基于三角形面积坐标和 B 网方法, 利用三次样条 Hermite 插值基重构了两个协调的薄板弯曲单元. 由于单元形函数是基于四边形构造的, 避免了等参变换, 可以有效地降低网格畸变对计算精度的影响.

关键词 样条插值基 四边形单元 薄板单元 B 网方法

MSC (2010) 主题分类 65D07, 65N30

1 引言

在有限元的工程应用中, 板单元的构造一直是研究热点. 协调的薄板弯曲位移型单元要求挠度和转角, 也即位移的函数值和导数值都是连续的, 因此, 直接构造协调的位移型薄板弯曲单元是非常困难的 (参见文献 [1, 2]). 例如, 基于三角形的 Argyris 元需要 21 个参数, 形函数空间是 5 次多项式. 为了减少节点参数和降低形函数空间多项式的次数, 通常采用非协调元, 如 6 个参数的 Morley 元, 形函数空间是 2 次多项式.

相比三角形单元, 构造协调的四边形板元则更加困难. Sander^[3] 和 Fraeijs de Veubeke^[4] 曾给出了一个构造四边形协调单元的方法, 由连接四边形的对角线形成四个三角区域, 分别构造三次位移场函数. 采用对角线作为斜坐标系来构造基函数, 但它的表达式很复杂, 造成应用上的不便. 对于非协调元, Batoz 和 Tahar^[5] 通过考虑挠度 w 和转角 θ_x, θ_y 各自独立插值, 仅在角点满足离散的 Kirchhoff 假设, 构造了四边形薄板弯曲单元 DKQ (discrete Kirchhoff quadrilateral). 它是基于四边形等参单元 Q8 构造的, 优点是形式简单、精度较好, 得到了广泛的应用. DKQ 单元的不足是由于采用等参变换导致其对网格的抗畸变能力不够高. 许多学者都希望提高 DKQ 的精度, 例如, Jeyachandrabose 等人^[6] 结合了离散的 Kirchhoff 假设和最小二乘法, 导出了一种改进的四边形薄板弯曲单元 IDKQ (improved discrete Kirchhoff quadrilateral); Chen 和 Cheung^[7] 在应变矩阵中加入精化应变矩阵, 得到了精化不

英文引用格式: Chen J, Li C J. The cubic spline Hermite interpolation bases for thin plate bending quadrilateral elements (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 1523–1536, doi: 10.1360/N012015-00035

协调元 RDKQ (refined discrete Krichhoff quadrilateral). 文献 [8–10] 利用四边形面积坐标方法, 或广义协调方法, 构造了一些薄板弯曲单元.

等参元是将矩阵单元的插值基函数通过等参变换, 映射为四边形单元的插值基函数, 在有限元计算时, 需要计算等参变换 Jacobi 矩阵的逆, 因此, 当网格畸变时, 会导致等参单元的精度下降 (参见文献 [11]). 为克服这一缺点, 我们发展了基于三角形面积坐标和 B 网方法^[12] 的样条单元方法. 在数学上, 样条是满足一定连续条件的分片多项式^[13,14], 其在有限元方法中得到了广泛的应用, 有限元单元形函数可以看作样条函数. 本文采用 B 网方法来表示单元插值函数. B 网方法是研究定义在三角剖分上样条函数的一种较为简便直观的方法, 起源于 Bernstein 多项式, 它基于三角形面积坐标, 可以方便地推广到四面体和高维单纯形上. 利用 B 网方法可以将样条函数的乘积、求导和积分等运算转化为对它们的 B 网系数的直接运算, 给计算带来很大的方便. 我们利用二元样条插值基函数, 成功地构造了一些有限元单元. 例如, 一族具有高完备阶的四边形平面单元^[15,16]、平面多边形单元^[17]、三维块体单元和金字塔单元^[18,19], 以及适用于偶应力/应变梯度理论的四边形单元^[20]. 这些样条单元有如下的优点: 通过三角剖分, 基于三角形面积坐标构造四边形的样条插值基函数, 避免计算等参变换的 Jacobi 矩阵和它的逆. 因此, 单元形函数的插值精度不受网格变化的影响, 与传统的等参单元相比, 新的样条单元有更好的性能. 本文利用 3 次样条 Hermite 插值方法, 重构了两个协调的四边形 16 参数和 12 参数的薄板弯曲单元.

本文结构如下: 第 2 节简要介绍 B 网方法, 并给出了基于样条方法构造的四边形 16 参数和 12 参数薄板单元; 第 3 节讨论一些数值算例; 最后给出结论.

2 三角形域上的 B 网方法

在一个三角形中, 由面积坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 定义的 n 次 Bernstein 多项式为

$$B_{i,j,k}^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{n!}{i!j!k!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k, \quad i + j + k = n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad (2.1)$$

容易验证, 所有 n 次 Bernstein 多项式构成了次数 $\leq n$ 的多项式空间 \mathbb{P}_n 的一组基函数, 并且满足单位分解性. 由直角坐标与面积坐标的关系, 任意一个直角坐标下的 n 次多项式可以表示为如下 B 网形式:

$$p(x, y) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

其中 $b_{i,j,k}$ 称为相应 Bernstein 基函数 $B_{i,j,k}^n$ 的 Bézier 系数 (或 B 网系数), 对应面积坐标为 $\xi_{i,j,k} = (i, j, k)/n$ 的点称为 B 网域点. 利用 B 网方法可以将样条函数的乘积、求导和积分等运算转化为对它们的 B 网系数的直接运算, 给计算带来很大的方便 (参见文献 [15,16]).

对一个凸的四边形区域 D , 四个角点记为 P_1, P_2, P_3, P_4 , 连接两条对角线 $\overline{P_1P_3}$ 和 $\overline{P_2P_4}$, 其交点记为 P_0 , 如图 1(a) 所示. 四边形被剖分为四个子三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. 这种三角化的四边形剖分也称作 FVS (Fraeijs de Veubeke and Sander) 三角剖分, 它曾被 Sander^[3] 和 Fraeijs de Veubeke^[4] 用于构造 16 参数的板单元.

上述对区域 D 的三角化剖分记为 Δ , 定义在 Δ 上的样条空间

$$S_d^r(\Delta) = \{s \in C^r(D) : s|_{\Delta_i} \in \mathbb{P}_d, i = 1, 2, 3, 4\}. \quad (2.2)$$

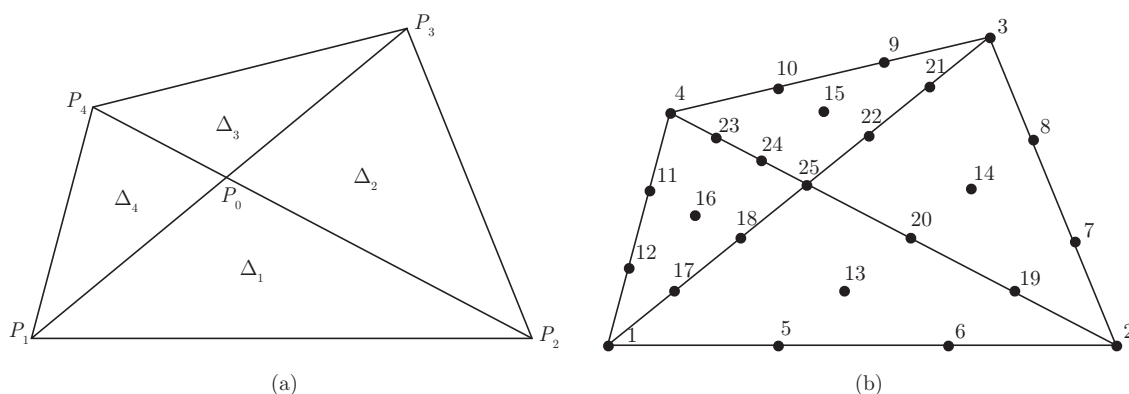


图 1 凸四边形的三角化剖分和 3 次函数的 B 网域点

这意味着样条空间 $S_d^r(\Delta)$ 中的函数是在两条对角线 $\overline{P_1P_3}$ 和 $\overline{P_2P_4}$ 上 C^r 光滑的分片 d 次多项式。

2.1 16 节点平面四边形样条单元

利用 B 网方法^[12, 16], 3 次样条空间 $S_3^1(\Delta)$ 在四边形域上共有 25 个域点 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{25})$, 它们的指标如图 1(b) 所示, 相应的 B 网系数记为 b_1, b_2, \dots, b_{25} . 由 B 网方法, 任何一个定义在此四边形上的 3 次样条函数可由其 25 个 B 网系数唯一确定. 而且, 每一个样条函数在两条对角线上的 C^1 连续条件, 等价于其 B 网系数满足如下的线性方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{17} = a \cdot b_5 + c \cdot b_{12}, \\ b_{18} = a \cdot b_{13} + c \cdot b_{16}, \\ b_{19} = b \cdot b_6 + d \cdot b_7, \\ b_{20} = b \cdot b_{13} + d \cdot b_{14}, \\ b_{21} = a \cdot b_8 + c \cdot b_9, \\ b_{22} = a \cdot b_{14} + c \cdot b_{15}, \\ b_{23} = b \cdot b_{11} + d \cdot b_{10}, \\ b_{24} = b \cdot b_{16} + d \cdot b_{15}, \\ b_{25} = b \cdot b_{18} + d \cdot b_{22}, \\ b_{25} = a \cdot b_{20} + c \cdot b_{24}, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{|P_4P_0|}{|P_4P_2|}, \\ b &= \frac{|P_3P_0|}{|P_3P_1|}, \\ c &= 1 - a, \\ d &= 1 - b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

易知, 上述线性方程组解空间的维数是 16. 求解上述包含 25 个未知量 b_1, b_2, \dots, b_{25} 的线性方程组, 分别取

$$(b_1, b_2, \dots, b_{16})^T = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, 16, \quad (2.5)$$

其中 \mathbf{e}_i 为 16 维单位向量. 我们可以得到 16 个线性无关的解向量

$$\mathbf{b}^{(i)} = \{b_j^{(i)}\}_{j=1}^{25}, \quad i = 1, \dots, 16.$$

我们用如下 16×25 维的矩阵给出解向量:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(16)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & ad \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & d & 0 & cd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bc \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

由上述得到的 B 网系数向量 $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \dots, \mathbf{b}^{(16)}$ 就确定了 16 个 3 次样条基函数, 记为

$$S_1(x, y), S_2(x, y), \dots, S_{16}(x, y).$$

由 B 网系数可直接验证这些样条基函数满足单位分解性,

$$\sum_{i=1}^{16} S_i(x, y) \equiv 1. \quad (2.7)$$

事实上, 在有限元计算中, 对这些样条基函数的计算可以直接通过 B 网系数进行, 不需要在直角坐标系下的表达式. 通过下面的一个 B 网系数之间的矩阵变换, 我们可以得到一组对应于 16 个域点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{16}$ 的 Lagrange 插值基函数 N_1, N_2, \dots, N_{16} ,

$$(N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_{16})^T = (\mathbf{M}_1 \ | \ \mathbf{M}_2) \cdot (S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_{16})^T, \quad (2.8)$$

其中转换矩阵 $(M_1 | M_2)$ 仅由四边形区域对角线的长度比例系数 a, b, c, d 确定, 这里

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{6+7d}{39} & \frac{-7b}{39} & \frac{-7b}{39} & \frac{6+7d}{39} \\ \frac{6+7c}{39} & \frac{6+7c}{39} & \frac{-7a}{39} & \frac{-7a}{39} \\ \frac{-7d}{39} & \frac{6+7b}{39} & \frac{6+7b}{39} & \frac{-7d}{39} \\ \frac{-7c}{39} & \frac{-7c}{39} & \frac{6+7a}{39} & \frac{6+7a}{39} \\ \frac{3ab+39(b-a-1)}{52} & \frac{3ab+39b}{52} & \frac{3ab}{52} & \frac{3ab-39a}{52} \\ \frac{3ab+39(a-b-1)}{52} & \frac{3ab-39b}{52} & \frac{3ab}{52} & \frac{3ab+39a}{52} \\ \frac{3ad-39d}{52} & \frac{3ad+39(a-d-1)}{52} & \frac{3ad+39a}{52} & \frac{3ad}{52} \\ \frac{3ad+39d}{52} & \frac{3ad+39(d-a-1)}{52} & \frac{3ad-39a}{52} & \frac{3ad}{52} \\ \frac{3cd}{52} & \frac{3cd-39c}{52} & \frac{3cd+39(d-c-1)}{52} & \frac{3cd+39d}{52} \\ \frac{3cd}{52} & \frac{3cd+39c}{52} & \frac{3cd+39(c-d-1)}{52} & \frac{3cd-39d}{52} \\ \frac{3bc+39c}{52} & \frac{3bc}{52} & \frac{3bc-39b}{52} & \frac{3bc+39(c-b-1)}{52} \\ \frac{3bc-39c}{52} & \frac{3bc}{52} & \frac{3bc+39b}{52} & \frac{3bc+39(b-c-1)}{52} \\ \frac{15ab+39(3-a-b)}{26} & \frac{15ab-39b}{26} & \frac{15ab}{26} & \frac{15ab-39a}{26} \\ \frac{15ad-39d}{26} & \frac{15ad+39(3-a-d)}{26} & \frac{15ad-39a}{26} & \frac{15ad}{26} \\ \frac{15cd}{26} & \frac{15cd-39c}{26} & \frac{15cd+39(3-c-d)}{26} & \frac{15cd-39d}{26} \\ \frac{15bc-39c}{26} & \frac{15bc}{26} & \frac{15bc-39b}{26} & \frac{15bc+39(3-b-c)}{26} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

以下定理显示此样条插值基函数在直角坐标系下具有 3 次完备阶.

定理 1 设 D 为凸四边形区域 $P_1P_2P_3P_4$, $N_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, 16$) 是由 (2.8)–(2.10) 定义的 3 次样条插值基函数. 定义如下插值算子:

$$(Nf)(x, y) := \sum_{i=1}^{16} f(\xi_i)N_i(x, y), \tag{2.11}$$

其中 ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 16$) 是图 1(b) 给出的相应的域点, 则对所有的 $f(x, y) \in \mathbb{P}_3$, 有

$$(Nf)(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

上述定理的证明可由 B 网方法直接验证, 在此省略. 通过定理 1, 我们可以得到平面问题的 16 节点 (参数) 单元 (仅有函数值作为插值条件), 其形状函数即为 $N_1(x, y), N_2(x, y), \dots, N_{16}(x, y)$. 下面将利用这组基构造两个用于薄板弯曲问题的 Hermite 插值基函数 (函数值和导数值作为插值条件).

2.2 16 参数的四边形样条薄板单元

对一个给定的四边形 $P_1P_2P_3P_4$, 记 P_0 为两条对角线 $\overline{P_1P_3}$ 和 $\overline{P_2P_4}$ 的交点, 四个角点的直角坐标为 $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. 设 P_5, P_6, P_7, P_8 为四边中点, \mathbf{n}_i 和 \mathbf{s}_i 分别为各边的单位法向量和单位切向量, 如图 2 所示. 设 T_5, T_6, T_7, T_8 分别为 P_0 到各边的垂足, h_i 为垂线 $\overline{P_0T_i}$ 的长度, 即

$$h_i = |\overline{P_0T_i}|, \quad i = 5, 6, 7, 8.$$

记

$$\begin{aligned} \Delta x_5 &= x_2 - x_1, & \Delta x_6 &= x_3 - x_2, & \Delta x_7 &= x_4 - x_3, & \Delta x_8 &= x_1 - x_4, \\ \Delta y_5 &= y_2 - y_1, & \Delta y_6 &= y_3 - y_2, & \Delta y_7 &= y_4 - y_3, & \Delta y_8 &= y_1 - y_4, \\ l_i &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

四个子三角形记为 $\Delta_1 = \Delta P_0P_1P_2$, $\Delta_2 = \Delta P_0P_2P_3$, $\Delta_3 = \Delta P_0P_3P_4$, $\Delta_4 = \Delta P_0P_4P_1$. P_0 关于每个三角形 Δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的面积坐标是相同的, 都为 $(1, 0, 0)$. 易知, 垂足 T_i 关于每个三角形 Δ_{i-4} ($i = 5, 6, 7, 8$) 的面积坐标为 $(0, \alpha_i, \beta_i)$, 其中

$$\beta_i = \frac{(x_0 - x_{i-4})\Delta x_i + (y_0 - y_{i-4})\Delta y_i}{l_i^2}, \quad \alpha_i = 1 - \beta_i.$$

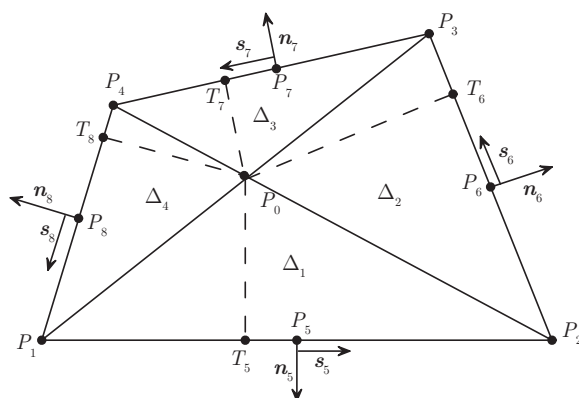


图 2 四边形单元的几何参数

因此, 各边单位法向量可以用面积坐标表示为

$$\mathbf{n}_i = \frac{(0, \alpha_i, \beta_i) - (1, 0, 0)}{h_i} = \frac{(-1, \alpha_i, \beta_i)}{h_i}, \quad i = 5, 6, 7, 8.$$

由上述四边形的几何参数和 16 个 3 次样条基 $S_1(x, y), S_2(x, y), \dots, S_{16}(x, y)$, 其 B 网系数 $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \dots, \mathbf{b}^{(16)}$ 如 (2.6) 所示, 我们可以得到一组如下的 Hermite 插值基函数:

$$\begin{aligned} H_1 &= S_1 + S_{12} + S_5 + \beta_8 S_{16} + \alpha_5 S_{13}, \\ H_2 &= S_2 + S_6 + S_7 + \beta_5 S_{13} + \alpha_6 S_{14}, \\ H_3 &= S_3 + S_8 + S_9 + \beta_6 S_{14} + \alpha_7 S_{15}, \\ H_4 &= S_4 + S_{10} + S_{11} + \beta_7 S_{15} + \alpha_8 S_{16}, \\ H_1^x &= -\frac{\Delta x_8}{3} S_{12} + \frac{\Delta x_5}{3} S_5 - \frac{(a + \beta_8)\Delta x_8 + a\Delta x_5}{6} S_{16} + \frac{c\Delta x_8 + (c + \alpha_5)\Delta x_5}{6} S_{13}, \\ H_2^x &= -\frac{\Delta x_5}{3} S_6 + \frac{\Delta x_6}{3} S_7 - \frac{(d + \beta_5)\Delta x_5 + d\Delta x_6}{6} S_{13} + \frac{b\Delta x_5 + (b + \alpha_6)\Delta x_6}{6} S_{14}, \\ H_3^x &= -\frac{\Delta x_6}{3} S_8 + \frac{\Delta x_7}{3} S_9 - \frac{(c + \beta_6)\Delta x_6 + c\Delta x_7}{6} S_{14} + \frac{a\Delta x_6 + (a + \alpha_7)\Delta x_7}{6} S_{15}, \\ H_4^x &= -\frac{\Delta x_7}{3} S_{10} + \frac{\Delta x_8}{3} S_{11} - \frac{(b + \beta_7)\Delta x_7 + b\Delta x_8}{6} S_{15} + \frac{d\Delta x_7 + (d + \alpha_8)\Delta x_8}{6} S_{16}, \\ H_1^y &= -\frac{\Delta y_8}{3} S_{12} + \frac{\Delta y_5}{3} S_5 - \frac{(a + \beta_8)\Delta y_8 + a\Delta y_5}{6} S_{16} + \frac{c\Delta y_8 + (c + \alpha_5)\Delta y_5}{6} S_{13}, \\ H_2^y &= -\frac{\Delta y_5}{3} S_6 + \frac{\Delta y_6}{3} S_7 - \frac{(d + \beta_5)\Delta y_5 + d\Delta y_6}{6} S_{13} + \frac{b\Delta y_5 + (b + \alpha_6)\Delta y_6}{6} S_{14}, \\ H_3^y &= -\frac{\Delta y_6}{3} S_8 + \frac{\Delta y_7}{3} S_9 - \frac{(c + \beta_6)\Delta y_6 + c\Delta y_7}{6} S_{14} + \frac{a\Delta y_6 + (a + \alpha_7)\Delta y_7}{6} S_{15}, \\ H_4^y &= -\frac{\Delta y_7}{3} S_{10} + \frac{\Delta y_8}{3} S_{11} - \frac{(b + \beta_7)\Delta y_7 + b\Delta y_8}{6} S_{15} + \frac{d\Delta y_7 + (d + \alpha_8)\Delta y_8}{6} S_{16}, \\ H_5^n &= -\frac{2}{3}h_5 S_{13}, \\ H_6^n &= -\frac{2}{3}h_6 S_{14}, \\ H_7^n &= -\frac{2}{3}h_7 S_{15}, \\ H_8^n &= -\frac{2}{3}h_8 S_{16}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

同样可以利用 B 网系数, 证明上述 3 次样条 Hermite 插值基函数具有 3 次完备阶.

定理 2 令 D 为任意的凸四边形区域 $P_1P_2P_3P_4$, 取 P_5, P_6, P_7, P_8 为四边中点, 3 次样条 Hermite 插值基函数 $H_i(x, y), H_i^x(x, y), H_i^y(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 和 $H_i^n(x, y)$ ($i = 5, 6, 7, 8$) 如 (2.12) 所示. 定义如下的线性插值算子:

$$\begin{aligned} (Hf)(x, y) &:= \sum_{i=1}^4 (f(P_i)H_i(x, y) + f_x(P_i)H_i^x(x, y) + f_y(P_i)H_i^y(x, y)) \\ &\quad + \sum_{i=5}^8 f_n(P_i)H_i^n(x, y), \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $f_x(P_i)$ 和 $f_y(P_i)$ 为函数在点 P_i 的关于 x 和 y 的偏导数, $f_n(P_i)$ 为函数在 P_i 的法向导数. 则对

任意的 $f(x, y) \in \mathbb{P}_3$, 都有

$$(Nf)(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

由定理 2, 我们可以得到一个 16 参数的薄板弯曲单元, 记为 QS16. 令 w 为挠度, θ_x 和 θ_y 分别为 x 和 y 两个方向转角, 且 $\theta_x = w_y, \theta_y = -w_x$, 相应的 16 个节点参数为

$$\mathbf{q} = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}, w_{n5}, w_{n6}, w_{n7}, w_{n8}\}^T, \quad (2.14)$$

则位移可表示为

$$w = [H_1, H_1^y, -H_1^x, H_2, H_2^y, -H_2^x, H_3, H_3^y, -H_3^x, H_4, H_4^y, -H_4^x, H_1^n, H_2^n, H_3^n, H_4^n] \cdot \mathbf{q}. \quad (2.15)$$

由于 $w, \theta_x, \theta_y, w_n$ 在四边形单元边界上都是连续的, 因此, QS16 为协调的四边形板单元. 由定理 2.2, 它可以严格重构 3 次位移场.

2.3 12 参数的四边形样条薄板单元

在一些实际问题中, 不便使用四边中点的法矢参数 w_{n5}, \dots, w_{n8} . 为了消去这些参数, 我们假设各边的法向导数 w_n 为线性函数. 在数学上, 这意味着寻找 $S_3^1(\Delta)$ 的一个 12 维的子空间.

根据上述法向导数的约束条件, 由 (2.6) 定义的 3 次样条基函数 $S_1(x, y), S_2(x, y), \dots, S_{16}(x, y)$, 我们构造如下的 12 个样条基函数:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= S_1 - \frac{\beta_8}{2} S_{16} - \frac{\alpha_5}{2} S_{13}, \\ \tilde{S}_2 &= S_2 - \frac{\beta_5}{2} S_{13} - \frac{\alpha_6}{2} S_{14}, \\ \tilde{S}_3 &= S_3 - \frac{\beta_6}{2} S_{14} - \frac{\alpha_7}{2} S_{15}, \\ \tilde{S}_4 &= S_4 - \frac{\beta_7}{2} S_{15} - \frac{\alpha_8}{2} S_{16}, \\ \tilde{S}_5 &= S_5 + \frac{a}{2} S_{16} + \frac{a + 2\alpha_5 - \beta_5}{2} S_{13}, \\ \tilde{S}_6 &= S_6 + \frac{b}{2} S_{14} + \frac{b - \alpha_5 + 2\beta_5}{2} S_{13}, \\ \tilde{S}_7 &= S_7 + \frac{d}{2} S_{13} + \frac{d + 2\alpha_6 - \beta_6}{2} S_{14}, \\ \tilde{S}_8 &= S_8 + \frac{a}{2} S_{15} + \frac{a - \alpha_6 + 2\beta_6}{2} S_{14}, \\ \tilde{S}_9 &= S_9 + \frac{c}{2} S_{14} + \frac{c + 2\alpha_7 - \beta_7}{2} S_{15}, \\ \tilde{S}_{10} &= S_{10} + \frac{d}{2} S_{16} + \frac{d - \alpha_7 + 2\beta_7}{2} S_{15}, \\ \tilde{S}_{11} &= S_{11} + \frac{b}{2} S_{15} + \frac{b + 2\alpha_8 - \beta_8}{2} S_{16}, \\ \tilde{S}_{12} &= S_{12} + \frac{c}{2} S_{13} + \frac{c - \alpha_8 + 2\beta_8}{2} S_{16}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

再根据四边形的几何参数, 我们将其转换为对应四个角点参数的一组 Hermite 插值基函数,

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_1 &= \tilde{S}_1 + \tilde{S}_{12} + \tilde{S}_5, \\
 \tilde{H}_2 &= \tilde{S}_2 + \tilde{S}_6 + \tilde{S}_7, \\
 \tilde{H}_3 &= \tilde{S}_3 + \tilde{S}_8 + \tilde{S}_9, \\
 \tilde{H}_4 &= \tilde{S}_4 + \tilde{S}_{10} + \tilde{S}_{11}, \\
 \tilde{H}_1^x &= -\frac{\Delta x_8}{3} \tilde{S}_{12} + \frac{\Delta x_5}{3} \tilde{S}_5, \\
 \tilde{H}_2^x &= -\frac{\Delta x_5}{3} \tilde{S}_6 + \frac{\Delta x_6}{3} \tilde{S}_7, \\
 \tilde{H}_3^x &= -\frac{\Delta x_6}{3} \tilde{S}_8 + \frac{\Delta x_7}{3} \tilde{S}_9, \\
 \tilde{H}_4^x &= -\frac{\Delta x_7}{3} \tilde{S}_{10} + \frac{\Delta x_8}{3} \tilde{S}_{11}, \\
 \tilde{H}_1^y &= -\frac{\Delta y_8}{3} \tilde{S}_{12} + \frac{\Delta y_5}{3} \tilde{S}_5, \\
 \tilde{H}_2^y &= -\frac{\Delta y_5}{3} \tilde{S}_6 + \frac{\Delta y_6}{3} \tilde{S}_7, \\
 \tilde{H}_3^y &= -\frac{\Delta y_6}{3} \tilde{S}_8 + \frac{\Delta y_7}{3} \tilde{S}_9, \\
 \tilde{H}_4^y &= -\frac{\Delta y_7}{3} \tilde{S}_{10} + \frac{\Delta y_8}{3} \tilde{S}_{11}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

定理 3 令 D 是任意的凸四边形区域 $P_1P_2P_3P_4$, 3 次样条 Hermite 插值基函数 $\tilde{H}_i(x, y), \tilde{H}_i^x(x, y), \tilde{H}_i^y(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 由 (2.17) 给出. 定义线性插值算子

$$(\tilde{H}f)(x, y) := \sum_{i=1}^4 (f(P_i)H_i(x, y) + f_x(P_i)H_i^x(x, y) + f_y(P_i)H_i^y(x, y)), \tag{2.18}$$

其中 $f_x(P_i)$ 和 $f_y(P_i)$ 为函数在点 P_i 的关于 x 和 y 的偏导数. 则对任意的 $f(x, y) \in \mathbb{P}_2$, 有

$$(\tilde{H}f)(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

由定理 3, 我们可以得到一个 12 参数的薄板弯曲单元, 记为 QS12, 相应的 12 个节点参数为

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}\}^T,$$

则位移为

$$w = [\tilde{H}_1, \tilde{H}_1^y, -\tilde{H}_1^x, \tilde{H}_2, \tilde{H}_2^y, -\tilde{H}_2^x, \tilde{H}_3, \tilde{H}_3^y, -\tilde{H}_3^x, \tilde{H}_4, \tilde{H}_4^y, -\tilde{H}_4^x] \cdot \tilde{\mathbf{q}}.$$

由于 $w, \theta_x, \theta_y, w_n$ 在四边形单元边界上是连续的, 因此, QS12 也是协调的薄板单元. 由定理 3, 它可以严格重构 2 次位移场.

3 数值算例

本节通过几个数值算例来测试两个样条薄板单元的精度, 并与已有文献中的单元进行比较.

例 1 分片检验. 图 3 为一被任意网格剖分的薄板, 对任意给定的 2 次和 3 次位移,

$$w_1 = \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2), \tag{3.1}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(x^3 + xy^2 + y^3). \tag{3.2}$$

经过计算, 表 1 给出了两个给定位移场的分片检验结果. 在表 1 中, 字母“Y”表示计算结果与精确值一致, 字母“N”表示计算结果与精确值不一致. 根据定理 2 和 3, 两个样条单元 QS12 和 QS16 分别具有 2 阶和 3 阶完备性, 与数值实验的结果一致.

例 2 简支方板和固支方板分别承受集中载荷和均布载荷. 由对称性, 取四分之一方板计算, 采用三种网格, 一种是规则网格, 另两种是不规则的, 如图 4 所示. Poisson 比 $\mu = 0.3$, 挠度误差比较结果列于图 5, 计算结果列于表 2 和 3. 我们可以看到, 两个样条单元比 DKQ 单元的结果更优, 与 AQ ψ -I 单元^[10] 结果相当.

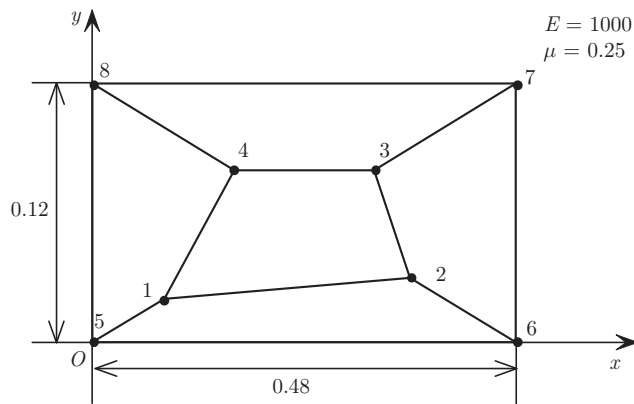


图 3 分片检验

表 1 分片检验结果 (图 3)

	2 次位移 (3.1)	3 次位移 (3.2)
QS12	Y	N
QS16	Y	Y

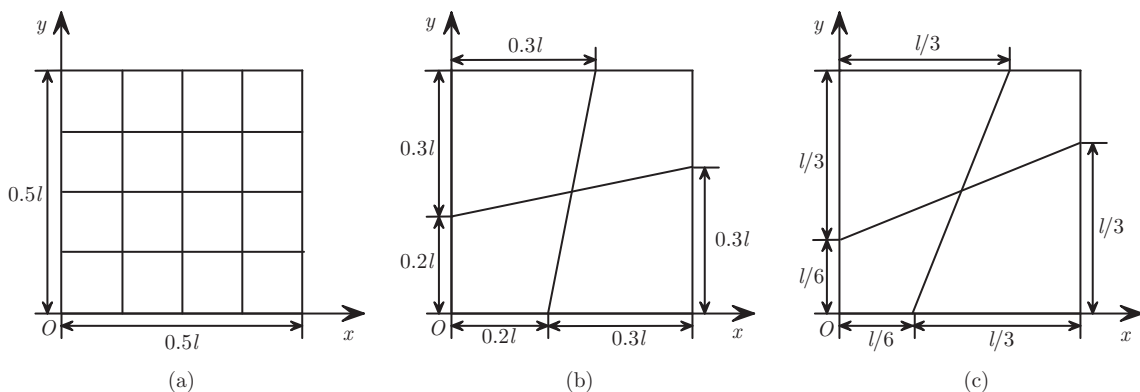


图 4 简支方板和固支方板. (a) 4 × 4 规则网格 (1); (b) 2 × 2 不规则网格 (2); (c) 2 × 2 不规则网格 (3)

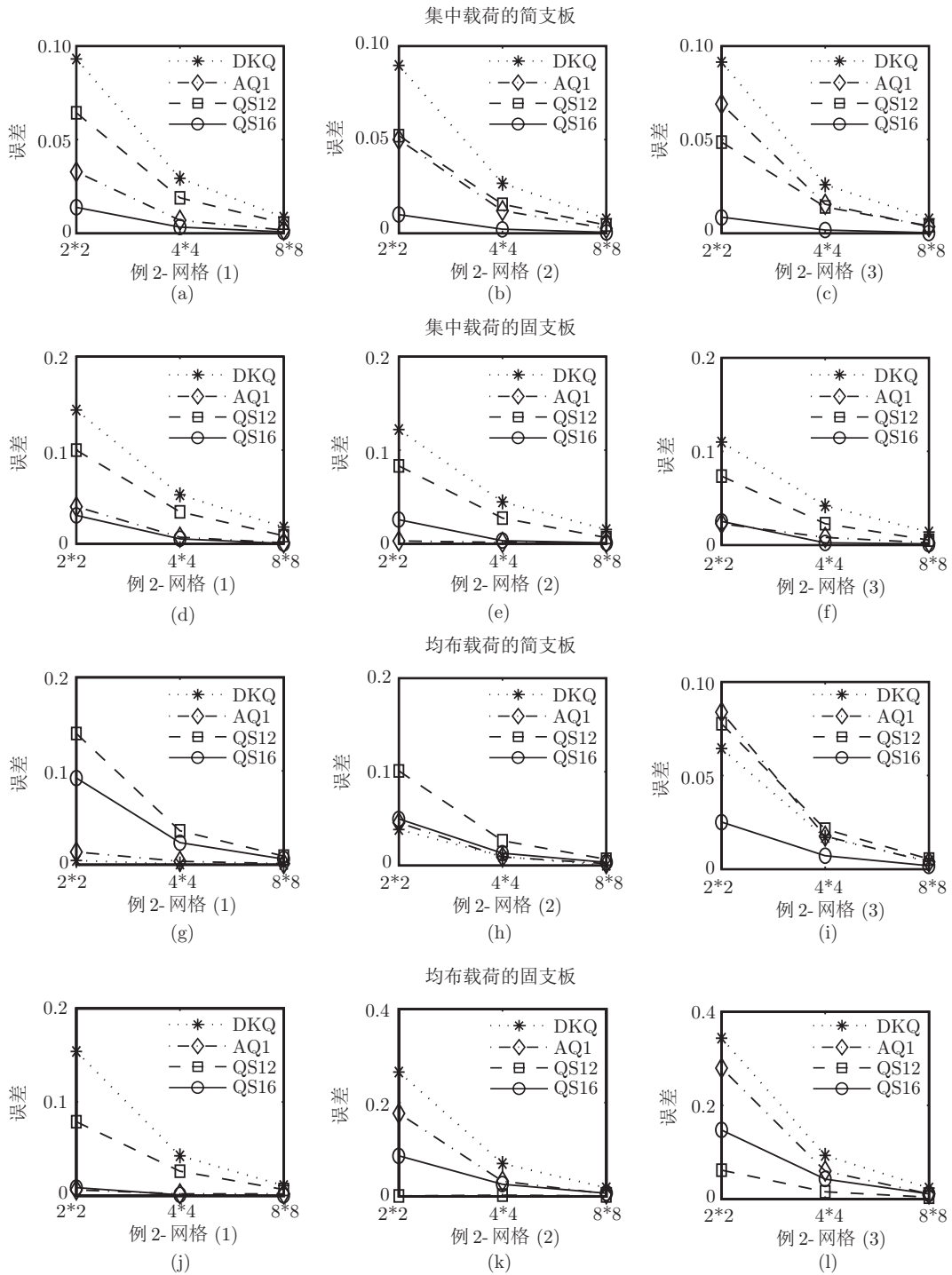


图 5 例 2 的比较结果

例 3 网格畸变测试. 考虑受均布载荷的四边固支方板, 采用图 6 所示网格, 其中 Δ 表示网格畸变程度的参数. 图 7 给出板中心挠度 w 误差和畸变参数 Δ 的曲线, 与 DKQ 单元相比, 样条单元 QS12 和 QS16 的抗畸变能力更好.

表 2 受集中载荷的方板中心挠度结果

		简支				固支			
		DKQ [10]	AQ ψ -I [10]	QS12	QS16	DKQ [10]	AQ ψ -I [10]	QS12	QS16
网格 (1)	2*2	0.1268	0.1198	0.1085	0.1144	0.6400	0.5378	0.5040	0.5431
	4*4	0.1194	0.1168	0.1138	0.1156	0.5893	0.5561	0.5409	0.5571
	8*8	0.1170	0.1162	0.1154	0.1159	0.5700	0.5595	0.5553	0.5602
网格 (2)	2*2	0.1264	0.1218	0.1100	0.1148	0.6283	0.5617	0.5135	0.5456
	4*4	0.1191	0.1174	0.1142	0.1157	0.5850	0.5608	0.5447	0.5582
	8*8	0.1169	0.1163	0.1155	0.1159	0.5685	0.5606	0.5563	0.5605
网格 (3)	2*2	0.1266	0.1240	0.1103	0.1150	0.6216	0.5727	0.5188	0.5459
	4*4	0.1190	0.1178	0.1143	0.1158	0.5834	0.5645	0.5472	0.5587
	8*8	0.1169	0.1155	0.1160	0.1166	0.5678	0.5613	0.5571	0.5607
精确解 ^[10]		0.1160ql ² /10D				0.5600ql ² /100D			

表 3 受均布载荷的方板的中心挠度结果

		简支				固支			
		DKQ [10]	AQ ψ -I [10]	QS12	QS16	DKQ [10]	AQ ψ -I [10]	QS12	QS16
网格 (1)	2*2	0.4045	0.4008	0.3494	0.3687	0.1460	0.1273	0.1166	0.1254
	4*4	0.4060	0.4048	0.3916	0.3967	0.1319	0.1263	0.1232	0.1264
	8*8	0.4062	0.4058	0.4026	0.4038	0.1279	0.1263	0.1257	0.1265
网格 (2)	2*2	0.4218	0.4248	0.3652	0.3861	0.1601	0.1489	0.1264	0.1374
	4*4	0.4101	0.4099	0.3955	0.4010	0.1354	0.1306	0.1262	0.1297
	8*8	0.4062	0.4070	0.4035	0.4049	0.1288	0.1272	0.1265	0.1274
网格 (3)	2*2	0.4324	0.4403	0.3747	0.3960	0.1700	0.1619	0.1343	0.1452
	4*4	0.4131	0.4134	0.3976	0.4033	0.1383	0.1341	0.1285	0.1319
	8*8	0.4080	0.4078	0.4040	0.4055	0.1295	0.1279	0.1270	0.1279
精确解 ^[10]		0.4062ql ⁴ /100D				0.1265ql ⁴ /100D			

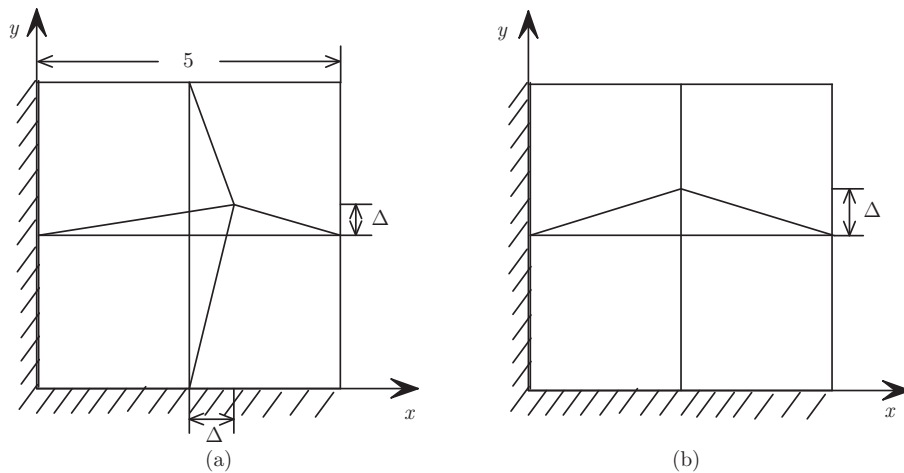


图 6 网格畸变检验

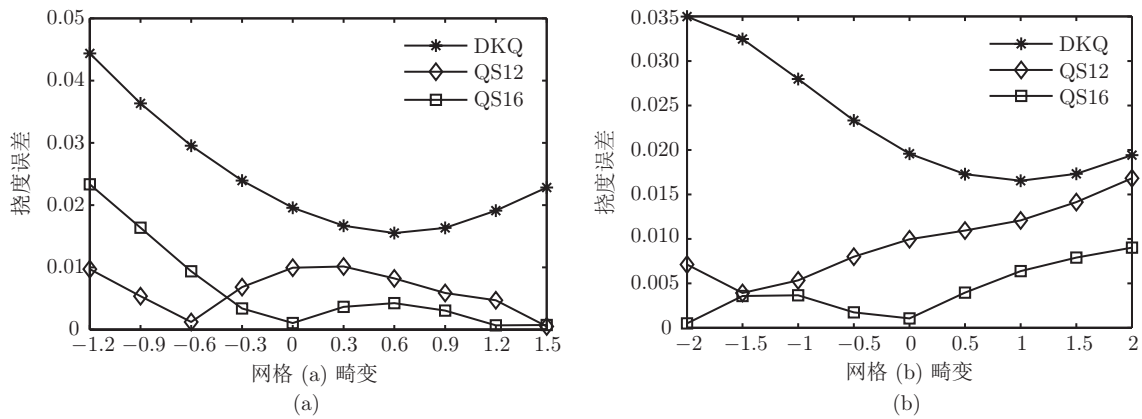


图 7 网格畸变结果比较

4 结论

在本文中, 基于 B 网方法和 3 次样条 Hermite 插值基函数, 我们构造了两个协调的四边形薄板单元. 由于单元形函数是基于四边形构造的, 避免了等参变换, 可以有效地降低网格畸变对计算精度的影响. 样条基函数通过 B 网系数表示, 可使有限元计算中的乘积、求导和积分等运算转化为对它们的 B 网系数的直接运算, 给计算带来很大的方便. 通过理论分析和数值算例, 体现出样条方法是构造高精度有限元的一个有效方法.

致谢 作者对审稿人提出的建议表示感谢.

参考文献

- 1 Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method. 5th ed. Singapore: Elsevier Pte Ltd, 2005
- 2 石钟慈, 王鸣. 有限元方法. 北京: 科学出版社, 2010
- 3 Sander G. Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion. Bull Soc Roy Sci Liège, 1964, 33: 456-494
- 4 Fraeijs de Veubeke B. A conforming finite element for plate bending. Internat J Solids Structures, 1968, 4: 95-108
- 5 Batoz J L, Tahar M B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. Internat J Numer Methods Engrg, 1982, 18: 1655-1677
- 6 Jeyachandrabose C, Kirkhope J, Meekisho L. An improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin-plate bending element. Internat J Numer Methods Engrg, 1987, 24: 635-654
- 7 Chen W J, Cheung Y K. Refined quadrilateral discrete Kirchhoff thin plate bending element. Internat J Numer Methods Engrg, 1997, 40: 3937-3953
- 8 Long Y Q, Bu X M, Long Z F, et al. Generalized conforming plate bending element using point and line compatibility conditions. Comput Structures, 1995, 54: 717-723
- 9 Soh A K, Long Z F, Cen S. Development of a new quadrilateral thin plate element using area coordinates. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, 190: 979-987
- 10 Chen X M, Cen S, Long Y Q. Two thin plate elements developed by assuming rotations and using quadrilateral area coordinates. Eng Mech, 2005, 22: 1-5
- 11 Lee N S, Bathe K J. Effects of element distortion on the performance of isoparametric elements. Internat J Numer Methods Engrg, 1993, 36: 3553-3576
- 12 Farin G. Triangular Bernstein-Bézier patches. Comput Aided Geom Design, 1986, 3: 83-127
- 13 Wang R H. The structural characterization and interpolation for multivariate splines. Acta Math Sin Engl Ser, 1975, 18: 91-106

- 14 Wang R H. Multivariate Spline Functions and Their Applications. Beijing: Science Press, 2001
- 15 Li C J, Wang R H. A new 8-node quadrilateral spline finite element. *J Comput Appl Math*, 2006, 195: 54–65
- 16 Chen J, Li C J, Chen W J. A family of spline finite elements. *Comput Structures*, 2010, 88: 718–727
- 17 Chen J, Li C J, Chen W J. Construction of n -sided polygonal spline element using area coordinates and B-net method. *Acta Mech Sin Engl Ser*, 2010, 26: 685–693
- 18 Li C J, Chen J, Chen W J. A 3D hexahedral spline element. *Comput Structures*, 2011, 89: 2303–2308
- 19 Chen J, Li C J, Chen W J. 3D pyramid spline element using the B-net method. *Acta Mech Sin Engl Ser*, 2011, 27: 986–993
- 20 Chen J, Li C J. A quadrilateral spline element for couple stress/strain gradient elasticity. *Comput Structures*, 2014, 138: 133–141

The cubic spline Hermite interpolation bases for thin plate bending quadrilateral elements

CHEN Juan & LI ChongJun

Abstract There are some difficulties involved in obtaining conforming displacement models for plate bending. In mathematics, splines are piecewise polynomials satisfying certain continuity conditions. The shape functions can be treated as splines. It has been demonstrated that the spline method is an efficient tool for developing high accuracy elements. In this paper, we reconstruct two conforming quadrilateral thin plate elements by using the cubic spline Hermite interpolation bases defined on the quadrilateral elements. They both have good accuracy for the numerical examples and are less insensitive to mesh distortions than the well-known DKQ element.

Keywords spline interpolation bases, quadrilateral element, thin plate element, the B-net method

MSC(2010) 65D07, 65N30

doi: 10.1360/N012015-00035