中国科学 E 辑: 信息科学 2008 年 第 38 卷 第 12 期: 2150 ~ 2162
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

一类具有不确定控制系数和依赖于不可测状态增长非线性系统的全局输出反馈镇定

刘允刚

山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061
E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

收稿日期: 2007-08-17; 接受日期: 2007-12-25
国家自然科学基金(批准号: 60674036)、山东省科技发展计划(批准号: 2004GG4204014)、教育部新世纪人才支持计划(批准号: NCET-07-0513)、山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(批准号: 2007BS01010)和教育部科学技术重点项目(批准号: 108079)资助项目

摘要 研究了一类具有不确定性控制系数和依赖于不可测状态增长非线性系统的全局输出反馈镇定问题. 主要由于不确定控制系数, 该问题一直没有解决, 其主要困难是源于惯用高增益观测器的无效性. 文中通过引入适当的状态变换和全新的、基于高增益 K-滤波器状态观测器, 成功地给出了该类系统的输出反馈控制器的反推设计方法, 并且证明了闭环系统的渐近稳定性可由控制参数的适当选取来保证.

关键词
非线性系统
不确定控制系数
高增益 K-滤波器
输出反馈
全局渐近镇定

非线性系统全局渐近稳定控制最近几十年来得到了集中研究[1~5]. 反馈线性化和积分反推是设计非线性系统全局稳定控制器的主要方法[2~4]. 自 20 世纪 90 年代早期以来, 积分反推方法在严格反馈系统控制方面已取得一系列研究成果[3,6~9]. 相对于状态反馈控制, 输出反馈控制理论发展缓慢[5]. 由于没有通用的设计非线性观测器的有效方法, 许多非线性系统的输出反馈控制问题至今仍有待深入研究[5,8~19].

近几年来, 一类具有依赖于不可测状态增长、但控制系数已知非线性系统的输出反馈稳定控制设计得到了广泛关注和集中研究[11~17]. 具体地, 文献[11]研究了一类线性依赖于不可测状态的广义输出反馈规范型非线性系统的跟踪问题, 首次给出了全局自适应输出反馈跟踪控制器的反推设计方法. 文献[12]研究了一类具有三角结构且满足线性增长条件的非线性系统的全局输出反馈控制问题, 并应用反推技术, 给出了不基于分离原理的指数稳定控制器设计过程. 作为文献[12]的推广, 文献[13]研究了系统增长未知且依赖于不可测状态的情况, 提出了一种高增益参数在线调整的自适应输出反馈控制设计方法. 文献[14,15]研究了系统具有线性地依赖于不可量测状态, 同时非线性地依赖于可测输出增长的更一般情况, 给出了基于在线

调整高增益观测器的输出反馈控制设计方法. 与文献[14,15]不同, 文献[16]研究了系统非线性关于不可测状态满足全局 Lipschitz 型条件的情况; 而文献[17]通过引入范数估计器, 研究了系统具有非线性地依赖于不可量测状态增长的情况. 上面论及的文献皆采用了高增益 Luenberger 型观测器, 这似乎已经成为研究该类非线性输出反馈控制的主要技术.

本文研究了一类具有不确定控制系数和依赖于不可测状态增长非线性系统的输出反馈全局渐近稳定控制设计问题. 据作者所知, 该控制设计问题至今还没有得到研究, 并且现有文献中的有关方法皆不能解决该控制问题. 这是因为对具有依赖于不可测状态增长非线性系统的输出反馈控制设计问题, 如何设计适当的高增益观测器是十分关键的[12~15], 而通过充分研究发现至今相关文献中的高增益 Luenberger 型观测器设计方法皆不可用具有不确定控制系数的情况[11~17]. 本文首先引入一等价线性状态变换, 将系统中不确定控制系数集中起来, 从而得到仅有一个不确定控制系数的新系统. 针对变换后新系统, 开发了适于不确定控制系数的全新的基于高增益 K-滤波器的状态观测器设计方法, 进而应用反推设计方法给出了输出反馈控制器的设计过程, 并证明了闭环系统的全局渐近稳定性可通过适当选取控制设计参数来保证.

本文通篇采用如下符号: A^{T} 表示矩阵或向量 A 的转置; I_i 表示 $i\times i$ 单位矩阵; 对 n 维列向量 x, 用 $x_i(i\leqslant n)$表示其第 i 分量, 且用 $x_{[i]}$表示列向量 $[x_1,\dots,x_i]^{\mathrm{T}}$; e_i 表示第 i 个元素为 1, 其余元素皆为 0 的 n 维单位列向量; $\|x\|_1$ 表示向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 的 1-范数, 即 $\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$; $\|x\|$表示向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 的 Euclid(或 2-)范数, 由其导出的矩阵 P 的范数记作$\|P\|$; 对任意向量 $x\in\mathbb{R}^n$, 有 $\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|$.

1 系统与问题描述

考虑如下 $n(n\geqslant 2)$ 阶单输入单输出(SISO)非线性不确定系统:

$$\begin{cases}\dot{\zeta}_i=g_i\zeta_{i+1}+\phi_i(t,\zeta,u), i=1,\dots,n-1,\\ \dot{\zeta}_n=g_nu+\phi_n(t,\zeta,u),\\ y=\zeta_1.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\zeta=[\zeta_1,\dots,\zeta_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ 为系统状态, 其初值为 $\zeta(0)=\zeta_0$; $u\in\mathbb{R}$ 和 $y\in\mathbb{R}$ 分别为系统的控制输入和输出; $g_i\neq 0$ 是未知常数, 称之为不确定控制系数; 未知函数 $\phi_i:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ 关于第一变量是连续的, 关于其余变量是局部 Lipschitz 的. 本文假定仅系统的输出 y, 即系统状态 ζ_1 可量测, 其余系统状态皆不可量测.

本文的主要结论是建立在以下假设条件的基础之上:

A1) 对于任意 $i=1,\dots,n$, 存在已知常数 $c>0$ 使得

$$|\phi_i(t,\zeta,u)|\leqslant c\left(|\zeta_1|+|\zeta_2|+\cdots+|\zeta_i|\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}^+,\forall\zeta\in\mathbb{R}^n,\forall u\in\mathbb{R}.$$

A2) 假设 $g_i, i=1,\dots,n$ 的符号是已知的, 并且存在已知的正常数 $\underline{g}_i$ 和 $\overline{g}_i$, 满足

$$\underline{g}_i\leqslant|g_i|\leqslant\overline{g}_i,\ i=1,\dots,n.$$

假设 A1)意味着原点 0 是开环系统(1)的平衡点，并显示该系统具有线性地依赖于不可测状态的增长．从最近文献[11~15]中可知该约束条件十分必要的，是实现输出反馈全局稳定控制的关键，其中文献[12, 13]分别研究了 c 为已知和未知常数的情况，文献[11,14,15]研究了 c 为可量测 输出 y 的函数的情况，但是这些结果和方法只适用于系统的控制系数是已知常数的情况．假设 A2)说明非线性系统(1)的控制系数虽未知，但是其所属的范围是已知的，这也符合许多实际情况．由假设 A2)还易知，$g := g_1 g_2 \cdots g_n$ 的符号也是已知的，并且存在已知的常数 $g_N > 0$ 和 $g_M > 0$，使得

$$g_N \leqslant |g| \leqslant g_M . \tag{2}$$

从现有相关文献(例如，文献[11~15,18]等)易知，当非线性系统(1)具有依赖于不可测状态增长时，实现输出反馈稳定控制的关键是设计适当形式的高增益状态观测器，但是现有方法不适用于控制系数不确定的情况．主要是由于控制系数中存在不确定性，所以现有的高增益观测器设计方法不适用于非线性系统(1)的输出反馈稳定控制设计，因而有必要开发新的理论和方法，特别是新的、适用于具有不确定控制系数非线性系统的高增益状态观测器设计方法，进而解决非线性系统(1)的输出反馈稳定控制设计问题．

显而易见，系统(1)的虚拟控制系数和实际控制系数皆有不确定性，因此，为了观测器和控制器设计方便起见，定义如下线性坐标变换 T：

$$x_1 = \zeta_1, \quad x_i = g_i \cdots g_{i-1} \zeta_i, \; i = 2, 3, \ldots, n, \tag{3}$$

以达到将不确定控制系数集中起来的目的．如此，系统(1)转化为如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g e_n u + f(t, x, u), \\ y = x_1, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 为新系统的状态，其初值 $x(0) = x_0 = T\zeta_0$，$g := g_1 g_2 \cdots g_n$ 是符号已知、数值不确定的非零常数，并且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ g_1 \phi_2 \\ \vdots \\ g_1 g_2 \cdots g_{n-1} \phi_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

对系统(4)，由坐标变换(3)以及假设 A1)和 A2)易证如下引理．

引理 1 对系统(4)的非线性 $f(\cdot)$，存在已知正常数 c'，使得对任意的 $(t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$，有

$$|f_i(t, x, u)| \leqslant c' \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_i| \right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

由于变换后新系统(4)的渐近稳定性意味着原系统(1)的渐近稳定性，所以只需研究新系统(4)的相应输出反馈稳定控制设计即可．

2 输出反馈控制

本节给出输出反馈控制器的设计过程，研究控制设计参数的选取问题，并证明闭环系统

的全局渐近稳定性可由控制设计参数的适当选取来保证, 进而证明如下定理.

定理1　对满足假设 A1)和 A2)的非线性系统(1), 存在输出反馈控制使得系统(1)和变换后系统(4)全局渐近稳定.

证明　只需设计出满足该定理的输出反馈控制器. 分如下 4 部分设计使得系统(4)全局渐近稳定的输出反馈控制器: (a) 设计基于高增益 K-滤波器的状态观测器; (b) 应用反推法给出输出反馈控制设计步骤; (c) 选取适当的控制设计参数, 得到可确保闭环系统的全局渐近稳定性的控制设计参数集; (d) 证明所设计的控制器使得系统(1)和(4)全局渐近稳定.

2.1　高增益 *K*-滤波器和状态观测

由于系统(4)具有不可测状态, 所以须设计某种形式的高增益状态观测器, 还由于其控制系数具有不确定性, 所以我们首先推广传统的 K-滤波器理论[3], 得到非线性系统(4)的如下高增益 K-滤波器:

$$\begin{cases}\dot{\xi}=A_{l_\varepsilon}\xi+l_\varepsilon y,\\ \dot{\lambda}=A_{l_\varepsilon}\lambda+e_n u,\end{cases}\tag{7}$$

其中 $\xi=[\xi_1,\ldots,\xi_n]^{\mathrm{T}}$, $\lambda=[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]^{\mathrm{T}}$, 且 $\xi(0)=\xi_0$, $\lambda(0)=\lambda_0$; ε 为小于 1 的待定正常数, 称之为控制设计参数; 向量 $l_\varepsilon=[l_1/\varepsilon,l_2/\varepsilon^2,\ldots,l_n/\varepsilon^n]^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $A_{l_\varepsilon}=A-l_\varepsilon e_1^{\mathrm{T}}$.

在本文中, 向量 $l=[l_1,\ldots,l_n]^{\mathrm{T}}$ 的选择使得矩阵 $A_l=A-le_1^{\mathrm{T}}$ 是 Hurwitz 的, 从而存在对称正定矩阵 P_l, 满足 Lyapunov 方程: $A_l^{\mathrm{T}}P_l+P_lA_l=-I_n$. 令 $I_\varepsilon=\mathrm{diag}[1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{n-1}]$, 以及 $P_{l_\varepsilon}=I_\varepsilon P_l I_\varepsilon$. 那么易知 P_{l_ε} 是对称、正定矩阵, 进而由事实 $\varepsilon A_{l_\varepsilon}=I_\varepsilon^{-1}A_l I_\varepsilon$ 易知 P_{l_ε} 满足: $A_{l_\varepsilon}^{\mathrm{T}}P_{l_\varepsilon}+P_{l_\varepsilon}A_{l_\varepsilon}=-\varepsilon^{-1}I_\varepsilon^2$. 这说明对任意 $\varepsilon>0$, A_{l_ε} 也是 Hurwitz 矩阵.

基于所设计的高增益 K-滤波器(7), 可构造系统(4)的状态估计: $\hat{x}=\xi+g\lambda$, 其满足如下动态方程

$$\dot{\hat{x}}=A_{l_\varepsilon}\hat{x}+l_\varepsilon y+ge_n u.\tag{8}$$

则状态估计误差 $\tilde{x}=x-\hat{x}$ 满足

$$\dot{\tilde{x}}=A_{l_\varepsilon}\tilde{x}+f(t,x,u).\tag{9}$$

注1　须进一步指出的是, 由高增益 K-滤波器(7)生成可用于反馈控制设计的信号 ξ 和 λ, 进而给出状态的观测值 $\hat{x}=\xi+g\lambda$. 但是该状态观测值不能直接用于反馈控制设计, 因为其中有不确定的常数 g, 所以是不可量测信号. 在下面的分析中, 将通过确保误差信号 $\tilde{x}$ 及可用信号 ξ 和 λ 的渐近收敛性, 进而得到 $\hat{x}$ 的渐近收敛性.

为了后面反推设计的需要, 须重写 y 所满足的动态方程. 由(4)式得到

$$\dot{y}=x_2+f_1(t,x,u)=\tilde{x}_2+\xi_2+g\lambda_2+f_1(t,x,u).\tag{10}$$

至此, 得到如下适于输出反馈控制设计的“完整”系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = A_{l_\varepsilon}\tilde{x} + f(t, x, u),\\ \dot{\xi} = A_{l_\varepsilon}\xi + l_\varepsilon y,\\ \dot{y} = \tilde{x}_2 + \xi_2 + g\lambda_2 + f_1(t,x,u),\\ \dot{\lambda}_i = \lambda_{i+1} - \dfrac{l_i}{e^i}\lambda_1,\ i = 2, 3, \ldots, n-1,\\ \dot{\lambda}_n = u - \dfrac{l_n}{e^n}\lambda_1.\end{cases} \tag{11}$$

显然, 使得系统(11)全局渐近稳定控制同样会使得变换后新系统(4)和原系统(1)为全局渐近稳定的. 因此下面将应用积分反推方法设计该“完整”系统的输出反馈稳定控制器.

2.2 反推设计

设计过程共由 3 部分组成: (ⅰ) 初始设置: 为整个反推设计过程做一些预备性处理; (ⅱ) 反推设计的前 2 步: 从中可以更具体、更详尽地展现反馈设计中所运用的方法和技术; (iii) 反推设计的迭代过程: 从中可见设计步骤的相似性和统一性, 也便于设计方法的编程实现.

2.2.1 初始设置

对于“完整”系统(11)的子系统 $\tilde{x}$ 和 ξ, 选取 $V_0 = V_{\tilde{x}} + V_\varepsilon$, 其中 $V_{\tilde{x}} = \tilde{x}^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon}\tilde{x}$, $V_\xi = \xi^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon}\xi$. 求 V_0 的导数, 得到

$$\dot{V}_0 = -\varepsilon^{-1}\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 - \varepsilon^{-1}\|I_\varepsilon\xi\|^2 + 2\tilde{x}^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon} f + 2\xi^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon} l_\varepsilon y. \tag{12}$$

注意到 $P_{l_\varepsilon} = I_\varepsilon P_l I_\varepsilon$ 和 $I_\varepsilon l_\varepsilon = \varepsilon^{-1} l$. 由此以及引理 1 易知(12)式右边最后 2 项分别满足

$$2\tilde{x}^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon} f \leqslant n^{3/2} c'\|P_l\|\left(\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 + \|I_\varepsilon x\|^2\right), \tag{13}$$

$$2\xi^{\mathrm{T}} P_{l_\varepsilon} l_\varepsilon y \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\|I_\varepsilon\xi\|^2 + \frac{2\|P\|^2\cdot\|l\|^2}{\varepsilon} y^2. \tag{14}$$

再由 $\tilde{x}$ 的定义, 知 $x_i = \tilde{x}_i + \xi_i + g\lambda_i$, $i = 1,\ldots,n$, 从而有

$$\|I_\varepsilon x\|^2 \leqslant y^2 + 3\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 + 3\|I_\varepsilon\xi\|^2 + 3g_M\sum_{i=2}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2. \tag{15}$$

如此, 将(13)~(15)式代入(12)式, 并记 $c_0 = 3g_M n^{3/2} c'\|P_l\|$, 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 \leqslant & -\left(\frac{1}{\varepsilon} - 4n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 - \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 3n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon\xi\|^2\\ & + \left(n^{3/2}c'\|P_l\| + \frac{2\|P\|^2\cdot\|l\|^2}{\varepsilon}\right)y^2 + c_0\sum_{i=2}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2.\end{aligned} \tag{16}$$

2.2.2 反推设计的前 2 步

步骤 1 选取 $V_1 = V_0 + 1/2y^2$. 那么求 V_1 的导数并将(16)式代入, 可得

$$\dot{V}_1 \leqslant -\left(\frac{1}{\varepsilon} - 4n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 - \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 3n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon \xi\|^2$$
$$+\left(n^{3/2}c'\|P_l\| + \frac{2\|P\|^2 \cdot \|l\|^2}{\varepsilon}\right)y^2 + c_0\sum_{i=2}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2 + y(\tilde{x}_2 + \xi_2 + g\lambda_2 + f_1). \tag{17}$$

选取虚拟控制

$$\alpha_1 = -\frac{\mathrm{sign}(g)}{\varepsilon g_N}\left(L_1 + 2\|P\|^2 \cdot \|l\|^2 + n^{3/2}c'\|P_l\|\right)y =: \frac{B_1(L_1)}{\varepsilon}y, \tag{18}$$

其中 $\mathrm{sign}(g)$ 表示 g 的符号，且由于 $g \neq 0$，所以 $\mathrm{sign}(g) = +1$ 或 $\mathrm{sign}(g) = -1$；L_1 以及出现在后面设计步骤中的 $L_2, L_3, \ldots, L_n$ 为待定正常数，称之为控制设计参数．此外，为方便计约定 $\alpha_0 = 0$.

令 $z_2 = \lambda_2 - \alpha_1$，并约定 $z_1 = y$．则将(18)式代入(17)式并注意到 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，得到

$$\dot{V}_1 \leqslant -\left(\frac{1}{\varepsilon} - 4n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 - \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 3n^{3/2}c'\|P_l\|\right)\|I_\varepsilon \xi\|^2$$
$$-\frac{L_1}{\varepsilon}y^2 + c_0\sum_{i=2}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2 + gyz_2 + y(\tilde{x}_2 + \xi_2 + f_1). \tag{19}$$

对上式最后项，应用配方技术和引理 1，得到

$$\begin{cases} y\tilde{x}_2 \leqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon\tilde{x}_2^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}y^2 \leqslant \dfrac{1}{2\varepsilon}\|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 + \dfrac{1}{2\varepsilon}y^2, \\ y\xi_2 \leqslant \dfrac{1}{4}\varepsilon\xi_2^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}y^2 \leqslant \dfrac{1}{4\varepsilon}\|I_\varepsilon \xi\|^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}y^2, \\ yf_1 \leqslant |y| \cdot |f_1| \leqslant c'y^2. \end{cases} \tag{20}$$

此外，$c_0\varepsilon^2\lambda_2^2 = c_0\varepsilon^2(z_2 + \alpha_1)^2 \leqslant \varepsilon^2 2c_0 z_2^2 + 2c_0 B_1^2 y^2$．由此以及(19)和(20)式，有

$$\dot{V}_1 \leqslant -\beta_1^{\tilde{x}}\|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 - \beta_1^{\xi}\|I_\varepsilon \xi\|^2 - \beta_1^{y}y^2 + c_0\sum_{i=3}^{n}\lambda_i^2 + gyz_2 + \varepsilon^2 K_1 z_2^2, \tag{21}$$

其中 $K_1 = 2c_0$，$\beta_1^{\tilde{x}} = (1/2\varepsilon) - 4n^{3/2}c'\|P_l\|$，$\beta_1^{\xi} = 1/4\varepsilon - 3n^{3/2}c'\|P_l\|$，$\beta_1^{y} = (L_1 - 1.5)/\varepsilon - c' - 2c_0 B_1^2$.

步骤 2　首先由 z_2 的定义，求 z_2 所满足的动态方程，得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\lambda}_2 - \varepsilon^{-1}B_1\dot{y} = \lambda_3 - \varepsilon^{-2}l_2\lambda_1 - \varepsilon^{-1}B_1(x_2 + f_1) \\ &= \lambda_3 - \varepsilon^{-2}l_2\lambda_1 - \varepsilon^{-1}B_1(\tilde{x}_2 + \xi_2 + g\lambda_2 + f_1) \\ &=: \lambda_3 + \hat{z}_2 + \tilde{z}_2, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\hat{z}_2$ 和 $\tilde{z}_2$，以及在后面迭代步骤中出现的 $\hat{z}_i$ 和 $\tilde{z}_i$ 分表示 $\dot{z}_2$ 和 $\dot{z}_i$ 中“可用”和“不可用”于反馈控制设计的组成部分(它们的表达式很容易给出)．在此，为了与后面的迭代设计步骤相匹配，令 $B_{21}^{y}(L_1) = 0$，$B_{21}^{\lambda_1}(L_1) = -l_2$，$B_{21}^{\lambda_2}(L_1) = 0$，$B_{21}^{\xi_1}(L_1) = 0$，$B_{21}^{\xi_2}(L_1) = -B_1(L_1)$，$B_{22}(L_1) = -B_1(L_1)$．则有

$$\begin{cases}\dot{\hat{z}}_2=-\varepsilon^{-2}l_2\lambda_1-\varepsilon^{-1}B_1\xi_2\\ \quad =\varepsilon^{-2}B_{21}^{y}(L_1)y+\varepsilon^{-2}B_{21}^{\lambda_1}(L_1)\lambda_1+\varepsilon^{-1}B_{21}^{\lambda_2}(L_1)\lambda_2+\varepsilon^{-2}B_{21}^{\xi_1}(L_1)\xi_1+\varepsilon^{-1}B_{21}^{\xi_2}(L_1)\xi_2,\\ \dot{\tilde{z}}_2=-\varepsilon^{-1}B_1(\tilde{x}_2+g\lambda_2+f_1)=\varepsilon^{-1}B_{22}(L_1)(\tilde{x}_2+g\lambda_2+f_1).\end{cases}\tag{23}$$

在该步中，选取 $V_2=V_1+(\varepsilon^2/2)z_2^2$．则求 V_2 的导数并将(21)式代入，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\leqslant&-\beta_1^{\tilde{x}}\left\|I_\varepsilon\tilde{x}\right\|^2-\beta_1^{\xi}\left\|I_\varepsilon\xi\right\|^2-\beta_1^{y}y^2+c_0\sum_{i=3}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2\\&+gyz_2+\varepsilon^2K_1z_2^2+\varepsilon^2z_2(\lambda_3+\dot{\hat{z}}_2+\dot{\tilde{z}}_2).\end{aligned}\tag{24}$$

选取如下虚拟控制

$$\alpha_2=-\varepsilon^{-1}L_2z_2-\dot{\hat{z}}_2,\tag{25}$$

并令 $z_3=\lambda_3-\alpha_2$．则(24)式变为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\leqslant&-\beta_1^{\tilde{x}}\left\|I_\varepsilon\tilde{x}\right\|^2-\beta_1^{\xi}\left\|I_\varepsilon\xi\right\|^2-\beta_1^{y}y^2+c_0\sum_{i=3}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2\\&+\varepsilon^2K_1z_2^2-\varepsilon^2L_2z_2^2+\varepsilon^2z_2z_3+gyz_2+\varepsilon^2z_2\dot{\tilde{z}}_2.\end{aligned}\tag{26}$$

如下分别分析上式右边的最后 2 项，有

$$\begin{cases}gz_2y\leqslant\dfrac{\varepsilon g_Mz_2^2}{2}+\dfrac{g_My^2}{2\varepsilon},\\ \varepsilon B_{22}(L_1)z_2g\lambda_2=\varepsilon B_{22}(L_1)z_2g(\alpha_1+z_2)\\ \qquad=\varepsilon B_{22}(L_1)z_2g(\varepsilon^{-1}B_1y+z_2)\leqslant\varepsilon z_2^2+\varepsilon C_{21}(L_1)z_2^2+\dfrac{y^2}{4\varepsilon},\\ \varepsilon B_{22}(L_1)z_2\tilde{x}_2\leqslant\varepsilon C_{22}(L_1)z_2^2+\dfrac{\left\|I_\varepsilon\tilde{x}\right\|^2}{4\varepsilon},\\ \varepsilon B_{22}(L_1)z_2f_1\leqslant\varepsilon^2C_{23}(L_1)z_2^2+\dfrac{y^2}{4},\end{cases}\tag{27}$$

其中 $C_{21}=g_M^2B_{22}^2\left(B_1^2+(1/4)\right)$， $C_{22}=B_{22}^2$ 和 $C_{23}=B_{22}^2c'^2$.

此外，还有

$$\begin{aligned}\varepsilon^4\lambda_3^2=\varepsilon^4(z_3+\alpha_2)^2&=\varepsilon^4(z_3-\varepsilon^{-1}L_2z_2-\dot{\hat{z}}_2)^2\\&\leqslant4\varepsilon^4z_3^2+4\varepsilon^2L_2^2z_2^2+4\varepsilon^4B_1^2\xi_2^2+4l_2^2g_N^{-2}(y-\tilde{x}_1-\xi_1)^2\\&\leqslant4\varepsilon^4z_3^2+4\varepsilon^2L_2^2z_2^2+4B_1^2\left\|I_\varepsilon\xi\right\|^2+12l_2^2g_N^{-2}(y^2+\left\|I_\varepsilon\tilde{x}\right\|^2+\left\|I_\varepsilon\xi\right\|^2).\end{aligned}\tag{28}$$

由此以及(27)式，令 $K_2=7c_0$，$C_{24}(L_{[2]})=K_2\max\{L_2^2,\ B_1^2+3l_2^2g_N^{-2}\}$，$C_{21}^{z_2}(L_1)=C_{21}+C_{22}+1+\max\{g_M,1\}/2$, $C_{22}^{z_2}(L_{[2]})=C_{23}+C_{24}+K_1$,进而令 $\beta_2^{\tilde{x}}=\beta_1^{\tilde{x}}-(1/4\varepsilon)-C_{24}(L_{[2]})$, $\beta_2^{\xi}=\beta_1^{\xi}-C_{24}(L_{[2]})$, $\beta_2^{y}=\beta_1^{y}-C_{24}(L_{[2]})-(1+\varepsilon+2g_M)/4\varepsilon$, $\beta_2^{z_2}=L_2-C_{21}^{z_2}(L_1)-\varepsilon C_{22}^{z_2}(L_{[2]})$，并约定 $\beta_1^{z_2}=0$．则(26)式变为

$$\dot{V}_2 \leqslant -\beta_2^{\tilde{x}}\left\|I_\varepsilon \tilde{x}\right\|^2 - \beta_2^{\xi}\left\|I_\varepsilon \xi\right\|^2 - \beta_2^{y} y^2 - \varepsilon\beta_2^{z_2} z_2^2 + c_0\sum_{i=4}^{n}\varepsilon^{2i-2}\lambda_i^2 + \varepsilon^2 z_2 z_3 + K_2\varepsilon^4 z_3^2. \tag{29}$$

2.2.3　反推设计的迭代步骤

对任意 $i = 3, 4, \dots, n$, 假设 $V_{i-1} = V_0 + \sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon^{2j-2} z_j^2$ 满足

$$\dot{V}_{i-1} \leqslant -\beta_{i-1}^{\tilde{x}}\left\|I_\varepsilon \tilde{x}\right\|^2 - \beta_{i-1}^{\xi}\left\|I_\varepsilon \xi\right\|^2 - \beta_{i-1}^{y} y^2 - \sum_{j=2}^{i-1}\varepsilon^{2j-3}\beta_{i-1}^{z_j} z_j^2 + c_0\sum_{j=i+1}^{n}\varepsilon^{2j-2}\lambda_j^2 + \varepsilon^{2i-4} z_{i-1} z_i + K_{i-1}\varepsilon^{2i-2} z_i^2, \tag{30}$$

其中 $\beta_{i-1}^{\tilde{x}}, \beta_{i-1}^{\xi}, \beta_{i-1}^{y}, \beta_{i-1}^{z_j}, j = 2,3,\dots,i-1$ 为关于 ε 和 $L_{[i-1]}$ 的函数; $K_{i-1} = (2i+1)c_0$; $z_j = \lambda_j - \alpha_{j-1}$, $j = 2,3,\dots,i$, 其中虚拟控制 $\alpha_{j-1}, j = 3,4,\dots,i$ 定义如下

$$\alpha_{j-1} = -\varepsilon^{-1} L_{j-1} z_{j-1} - \hat{z}_{j-1}, \quad j = 3, 4, \dots, i, \tag{31}$$

并且对任意 $j = 2,3,\dots,i-1$,

$$\begin{cases} \dot{z}_j = \lambda_{j+1} + \hat{z}_j + \tilde{z}_j, \\ \hat{z}_j = \varepsilon^{-1} B_{j1}^{y}(L_{[j-1]}) y + \sum_{k=1}^{j}\varepsilon^{-j+k-1}\left(B_{j1}^{\lambda_k}(L_{[j-1]})\lambda_k + B_{j1}^{\xi_k}(L_{[j-1]})\xi_k\right), \\ \tilde{z}_j = \varepsilon^{-j+1} B_{j2}(L_{[j-1]})(\tilde{x}_2 + g\lambda_2 + f_1). \end{cases} \tag{32}$$

在(32)式中的 $B_{j1}^{y}, B_{j1}^{\lambda_k}, B_{j1}^{\xi_k}$ 和 B_{j2} 由如下迭代式定义($q \geqslant 2$)

$$\begin{cases} B_{q+1,1}^{y}(L_{[q]}) = L_q B_{q1}^{y}(L_{[q-1]}) + \sum_{k=1}^{q} l_k B_{q1}^{\xi_k}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,1}^{\lambda_1}(L_{[q]}) = -l_{q+1} + L_q B_{q1}^{\lambda_1}(L_{[q-1]}) - \sum_{k=1}^{q} l_k B_{q1}^{\lambda_k}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,1}^{\lambda_p}(L_{[q]}) = L_q B_{q1}^{\lambda_p}(L_{[q-1]}) + B_{q1}^{\lambda_{p-1}}(L_{[q-1]}), \ p = 2,3,\dots,q, \\ B_{q+1,1}^{\lambda_{q+1}}(L_{[q]}) = L_q + B_{q1}^{\lambda_q}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,1}^{\xi_1}(L_{[q]}) = L_q B_{q1}^{\xi_1}(L_{[q-1]}) - \sum_{k=1}^{q} l_k B_{q1}^{\xi_k}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,1}^{\xi_2}(L_{[q]}) = B_{q1}^{y}(L_{[q-1]}) + B_{q1}^{\xi_1}(L_{[q-1]}) + L_q B_{q1}^{\xi_2}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,1}^{\xi_p}(L_{[q]}) = B_{q1}^{\xi_{p-1}}(L_{[q-1]}) + L_q B_{q1}^{\lambda_p}(L_{[q-1]}), \quad p = 3,4,\dots,q, \\ B_{q+1,1}^{\xi_{q+1}}(L_{[q]}) = B_{q1}^{\xi_q}(L_{[q-1]}), \\ B_{q+1,2}(L_{[q]}) = L_q B_{q2}(L_{[q-1]}) + B_{q1}^{y}(L_{[q-1]}). \end{cases} \tag{33}$$

基于如上假定, 下面验证第 $i(i = 3,4,\dots,n)$ 步也有相似的结论. 首先, 令 $u = \lambda_{n+1}$ 并求 z_i 满足的动态方程, 易得

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \lambda_{i+1} + B_{i1}^{y}(L_{[i-1]})\varepsilon^{-i}y + \sum_{k=1}^{i}\varepsilon^{-i+k-1}(B_{i1}^{\lambda_k}(L_{[i-1]})\lambda_k + B_{i1}^{\xi_k}(L_{[i-1]})\xi_k) \\ &\quad + \varepsilon^{-i+1}B_{i2}(L_{[i-1]})(\tilde{x}_2 + g\lambda_2 + f_1) \\ &=: \lambda_{i+1} + \hat{z}_i + \tilde{z}_i,\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $B_{i1}^{y}(L_{[i-1]})$, $B_{i1}^{\lambda_k}(L_{[i-1]})$, $B_{i1}^{\xi_k}(L_{[i-1]})$, $k=1,\dots,i$ 和 $B_{i2}(L_{[i-1]})$ 满足迭代关系式(33), 进而可由第 2 步给出的初始值(即 $B_{21}^{y}(L_1)$, $B_{21}^{\lambda_1}(L_1)$, $B_{21}^{\lambda_2}(L_1)$, $B_{21}^{\xi_1}(L_1)$, $B_{21}^{\xi_2}(L_1)$ 和 $B_{22}(L_1)$ 已经给定)通过递推给出具体的表达式.

选取 $V_i = V_{i-1} + (\varepsilon^{2i-2}/2)z_i^2$. 求 V_i 的导数并将(30)式代入, 得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leqslant -\beta_{i-1}^{\tilde{x}}\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 - \beta_{i-1}^{\xi}\|I_\varepsilon\xi\|^2 - \beta_{i-1}^{y}y^2 - \sum_{j=2}^{i-1}\varepsilon^{2j-3}\beta_{i-1}^{z_j}z_j^2 + c_0\sum_{j=i+1}^{n}\varepsilon^{2j-2}\lambda_j^2 \\ &\quad + \varepsilon^{2i-4}z_{i-1}z_i + \varepsilon^{2i-2}K_{i-1}z_i^2 + \varepsilon^{2i-2}z_i(\lambda_{i+1} + \hat{z}_i + \tilde{z}_i).\end{aligned} \tag{35}$$

选取虚拟控制

$$\alpha_i = -\varepsilon^{-1}L_i z_i - \hat{z}_i, \tag{36}$$

并且令 $z_{i+1} = \lambda_{i+1} - \alpha_i$. 如此, 将虚拟控制(36)式代入(35)式, 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leqslant -\beta_{i-1}^{\tilde{x}}\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 - \beta_{i-1}^{\xi}\|I_\varepsilon\xi\|^2 - \beta_{i-1}^{y}y^2 - \sum_{j=2}^{i-1}\varepsilon^{2j-3}\beta_{i-1}^{z_j}z_j^2 - \varepsilon^{2i-3}L_i z_i^2 \\ &\quad + c_0\sum_{j=i+1}^{n}\varepsilon^{2j-2}\lambda_j^2 + \varepsilon^{2i-2}z_i z_{i+1} + \varepsilon^{2i-2}K_{i-1}z_i^2 + \varepsilon^{2i-4}z_{i-1}z_i + \varepsilon^{2i-2}z_i\tilde{z}_i.\end{aligned} \tag{37}$$

上式最后两项 $\varepsilon^{2i-2}z_i\tilde{z}_i$ 和 $\varepsilon^{2i-4}z_{i-1}z_i$ 满足

$$\begin{cases}\varepsilon^{i-1}B_{i2}(L_{[i-1]})gz_i\lambda_2 \leqslant \varepsilon z_2^2 + \varepsilon^{2i-3}C_{i1}(L_{[i-1]})z_i^2 + \dfrac{y^2}{4\varepsilon}, \\ \varepsilon^{i-1}B_{i2}(L_{[i-1]})z_i\tilde{x}_2 \leqslant \varepsilon^{2i-3}C_{i2}(L_{[i-1]})z_i^2 + \dfrac{\|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2}{2^i\varepsilon}, \\ \varepsilon^{i-1}B_{i2}(L_{[i-1]})z_i f_1 \leqslant \varepsilon^{2i-2}C_{i3}(L_{[i-1]})z_i^2 + \dfrac{y^2}{4}, \\ \varepsilon^{2i-4}z_{i-1}z_i \leqslant \max\{g_M,1\}\left(\dfrac{\varepsilon^{2i-5}}{2}z_{i-1}^2 + \dfrac{\varepsilon^{2i-3}}{2}z_i^2\right),\end{cases} \tag{38}$$

其中 $C_{i1} = g_M^2 B_{i2}^2\left(B_1^2 + (1/4)\right)$, $C_{i2} = 2^{i-2}B_{i2}^2$ 和 $C_{i3} = B_{i2}^2 c'^2$ 为依赖于 $L_{[i-1]}$, 而独立于ε的已知的连续函数. 此外, 当 $i \leqslant n-1$ 时, 有

$$\begin{aligned}c_0\varepsilon^{2i}\lambda_{i+1}^2 &= c_0\varepsilon^{2i}(z_{i+1}+\alpha_i)^2 = c_0\varepsilon^{2i}(z_{i+1} - L_i\varepsilon^{-1}z_i - \hat{z}_i)^2 \\ &\leqslant \varepsilon^{2i}K_i z_{i+1}^2 + C_{i4}(L_{[i]})\left(y^2 + \|I_\varepsilon\tilde{x}\|^2 + \|I_\varepsilon\xi\|^2 + \sum_{j=2}^{i}\varepsilon^{2j-2}z_j^2\right),\end{aligned} \tag{39}$$

其中 $K_i = c_0(2i+3)$ 为已知常数，$C_{i4}(L_{[i]}) = K_i \max\{L_i^2, (B_{i1}^{y})^2, (B_{i1}^{\lambda_1})^2, \ldots, (B_{i1}^{\lambda_i})^2, (B_{i1}^{\xi_1})^2, \ldots, (B_{i1}^{\xi_i})^2\}$ 依赖于 $L_{[i]}$、但独立于 ε.

注 2　须特别指出的是，当 $i = n$ 时，因为 $c_0 \sum_{j=i+1}^{n} \varepsilon^{2j-2} \lambda_j^2 \equiv 0$，所以在最后设计步骤中无类似(39)的分析过程. 但为了方便起见，约定 $K_n = 0$, $C_{n4}(L_{[n]}) = 0$.

令 $C_{i1}^{z_i}(L_{[i-1]}) = C_{i1} + C_{i2} + 1 + (\max\{g_M, 1\}/2)$, $C_{i2}^{z_i}(L_{[i]}) = C_{i3} + C_{i4} + K_{i-1}$，以及

$$\begin{cases} \beta_i^{\tilde{x}} = \beta_{i-1}^{\tilde{x}} - \dfrac{1}{2^i \varepsilon} - C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_i^{\xi} = \beta_{i-1}^{\xi} - C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_i^{y} = \beta_{i-1}^{y} - \dfrac{1+\varepsilon}{4\varepsilon} - C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_i^{z_2} = \beta_{i-1}^{z_2} - 1 - \varepsilon C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_i^{z_j} = \beta_{i-1}^{z_j} - \varepsilon C_{i4}(L_{[i]}), \quad j = 3, 4, \ldots, i-2, \\ \beta_i^{z_{i-1}} = \beta_{i-1}^{z_{i-1}} - \varepsilon C_{i4}(L_{[i]}) - 1 - \dfrac{\max\{g_M, 1\}}{2}, \\ \beta_i^{z_i} = L_i - C_{i1}^{z_i}(L_{[i-1]}) - \varepsilon C_{i2}^{z_i}(L_{[i]}), \end{cases} \tag{40}$$

并且约定 $\beta_k^{z_j} = 0, k > j, \lambda_{n+2} = 0, z_{n+1} = 0$. 如此(37)式变为

$$\dot{V}_i \leqslant -\beta_i^{\tilde{x}} \|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 - \beta_i^{\xi} \|I_\varepsilon \xi\|^2 - \beta_i^{y} y^2 - \sum_{j=2}^{i-1} \varepsilon^{2j-3} \beta_i^{z_j} z_j^2 + c_0 \sum_{j=i+2}^{n} \varepsilon^{2j-2} \lambda_j^2 + \varepsilon^{2i-2} z_i z_{i+1} + \varepsilon^{2i} K_i z_{i+1}^2. \tag{41}$$

由上面的设计步骤，最终可导出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$，进而得到输出反馈控制的形式

$$u = \alpha_n, \tag{42}$$

并且

$$\dot{V}_n \leqslant -\beta_n^{\tilde{x}} \|I_\varepsilon \tilde{x}\|^2 - \beta_n^{\xi} \|I_\varepsilon \xi\|^2 - \beta_n^{y} y^2 - \sum_{i=2}^{n} \varepsilon^{2i-3} \beta_n^{z_i} z_i^2. \tag{43}$$

显然，在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 中，控制设计参数 ε 和 $L_1, \ldots, L_n$ 还有待确定. 这些参数的适当选取对闭环系统的渐近稳定性至关重要. 下节讨论了参数的选取问题.

2.3　控制设计参数选择

关于控制设计参数 ε 和 $L_1, \ldots, L_n$，有如下引理，其证明见附录 A.

引理 2　总存在正的控制设计参数 ε 和 $L_1, \ldots, L_n$，使得

$$\beta_n^{\tilde{x}} > 0,\ \beta_n^{\xi} > 0,\ \beta_n^{y} > 0,\ \beta_n^{z_i} > 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{44}$$

2.4　闭环系统全局渐近稳定性

选取在上面定义的V_n作为闭环系统的 Lyapunov 函数和满足引理 2 的控制设计参数ε和$L_1,\ldots,L_n$．则由(43)式可知$\dot{V}_n$为负定的，所以

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t) = 0,\quad \lim_{t\to\infty}\xi(t) = 0,\quad \lim_{t\to\infty}z(t) = 0. \tag{45}$$

由此以及上面构造的α_i，$i=1,\ldots,n$易知$\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)=0$．由此及(45)式易证闭环“完整”系统(11)是全局渐近稳定的，同样原系统(1)和变换后系统(4)也是全局渐近稳定的．

3　结论

本文研究了一类具有不确定性控制系数和依赖于不可测状态增长非线性系统的输出反馈全局渐近稳定控制设计．首先通过定义一线性状态变换，将不确定的控制系数集中起来，得到便于输出反馈设计的新系统．然后针对变换后的新系统构造了全新的基于高增益 K-滤波器的状态观测器，进而设计了基于该观测器的输出反馈控制器，分析了闭环系统的全局渐近稳定性．本文所给出的输出反馈控制算法的关键还在于选取适当的控制设计参数ε和$L_1,\ldots,L_n$，进而确保闭环系统的全局渐近稳定性．还有待进一步研究的问题是当系统或依赖于不可测状态增量中含有参数不确定性时，如何设计全局渐近稳定输出反馈控制器．

致谢　该文整理过程中得到了硕士生贾秀芹的帮助，在此致以衷心的感谢．

参考文献

1　Artstein Z. Stabilizations with relaxed controls. Nonlinear Anal, 1983, 7(11): 1163—1173 [DOI]
2　Kanellakopoulos I, Kokotovic P, Morse S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. IEEE T Automat Contr, 1991, 36(11): 1241—1253 [DOI]
3　Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995. 21—121, 285—369
4　Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995. 137—211, 387—460
5　Khalil H K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2002. 469—625
6　Kokotovic P, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. Automatica, 2001, 37(5): 637—662
7　Jiang Z P, Mareels I, Hill D J, et al. A unifying framework for global regulation via nonlinear output feedback: from ISS to iISS. IEEE T Automat Contr, 2004, 49(4): 549—562 [DOI]
8　Liu Y G, Zhang J F. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems. Syst Contr Lett, 2004, 52(2): 123—135 [DOI]
9　Liu Y G, Zhang J F. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with zero-dynamics. SIAM J Contr Optim, 2006, 45(3): 885—926 [DOI]
10　Mazenc F, Praly L, Dayawansa W P. Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples. Syst Contr Lett, 1994, 23(2): 119—125 [DOI]
11　Krishnamurthy P, Khorrami F. Global adaptive output feedback tracking for nonlinear systems linear in unmeasured states. In: Proceedings of the 2001 American Control Conference. Arlington: IEEE Control Systems Society,

2001. 4814—4819
12 Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm. IEEE T Automat Contr, 2002, 47(10): 1710—1715 [DOI]
13 Choi H L, Lim J T. Stabilization of a class of nonlinear systems by adaptive output feedback. Automatica, 2005, 41(6): 1091—1097 [DOI]
14 Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. Syst Contr Lett, 2004, 53(2): 107—116 [DOI]
15 Chen Y Z, Huang J. Global output feedback stabilization for uncertain nonlinear systems with output dependent incremental rate. In: Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston: IEEE Control Systems Society, 2004. 3047—3052
16 Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate. IEEE T Autom Contr, 2003, 48(6): 1103—1108 [DOI]
17 Kaliora G, Astolfi A, Praly L. Norm estimators and global output feedback stabilization of nonlinear systems with ISS inverse dynamics. IEEE T Autom Contr, 2006, 51(3): 493—498 [DOI]
18 Yang B, Lin W. Robust output feedback stabilization of uncertain nonlinear systems with uncontrollable and unobservable linearization. IEEE T Autom Contr, 2005, 50(5): 619—630 [DOI]
19 Li J, Qian C J. Global finite-time stabilization by dynamic output feedback for a class of continuous nonlinear systems. IEEE T Autom Contr, 2006, 51(5): 879—884 [DOI]

附录 A　引理 2 的证明

只需给出满足(44)式的一组控制设计参数 $L_1,\ldots,L_n$ 和 ε. 由前面的迭代设计步骤可知,

$$\begin{cases} \beta_n^{\tilde{x}} = \dfrac{1}{2^n\varepsilon} - 4n^{3/2}c'\|P_l\| - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_n^{\xi} = \dfrac{1}{4\varepsilon} - 3n^{3/2}c'\|P_l\| - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_n^{y} = \dfrac{L_1 - 1.5 - \frac{g_M}{2} - \frac{(n-1)(1+\varepsilon)}{4}}{\varepsilon} - c' - 2c_0B_1^2(L_1) - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_n^{z_2} = L_2 - (n-2) - \dfrac{\max\{g_M,1\}}{2} - C_{21}^{z_2}(L_1) - \varepsilon C_{22}^{z_2}(L_{[2]}) - \varepsilon\displaystyle\sum_{i=3}^{n} C_{i4}(L_{[i]}), \\ \beta_n^{z_j} = L_j - C_{j1}^{z_j}(L_{[j-1]}) - \varepsilon C_{j2}^{z_j}(L_{[j]}) - 1 - \dfrac{\max\{g_M,1\}}{2} \\ \qquad -1 - \varepsilon\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n} C_{k4}(L_{[k]}), \quad j = 3, 4, \cdots, n-1, \\ \beta_n^{z_n} = L_n - C_{n1}^{z_n}(L_{[n-1]}) - \varepsilon C_{n2}^{z_n}(L_{[n]}). \end{cases} \tag{A1}$$

下面按照先选 $L_1,\ldots,L_n$, 再选 ε 的顺序进行参数的选取.

(ⅰ) 很容易地依次选择 $L_1,\ldots,L_n$, 使得下式成立

$$\begin{cases} \bar{L}_1 := L_1 - \dfrac{2g_M + n + 5}{4} > 0, \\ \bar{L}_2 := L_2 - C_{21}^{z_2}(L_1) - (n-2) - \dfrac{\max\{g_M,1\}}{2} > 0, \\ \bar{L}_i := L_i - C_{i1}^{z_i}(L_{[i-1]}) - \dfrac{\max\{g_M,1\}}{2} - 1 > 0, \quad i = 3,4,\ldots,n-1, \\ \bar{L}_n := L_n - C_{n1}^{z_n}(L_{[n-1]}) > 0, \end{cases} \tag{A2}$$

其中 $C_{i1}^{z_i}(L_{[i-1]}),\ i=2,3,\dots,n$ 已经在前面的设计过程中定义.

(ii) 在已经选定 $L_1,\dots,L_n$ 的情况下, 选取参数ε使得

$$0<\varepsilon<\min\left\{1,\quad \frac{1}{2^n\left(4n^{3/2}c'\|P_l\|+\sum_{i=2}^{n}C_{i4}(L_{[i]})\right)},\quad \frac{\bar{L}_n}{C_{n2}^{z_n}(L_{[n]})},\ \frac{\bar{L}_1}{c'+\frac{n-1}{4}+2c_0B_1^2(L_1)+\sum_{i=2}^{n}C_{i4}(L_{[i]})},\right.$$
$$\left.\frac{\bar{L}_j}{C_{j2}^{z_j}(L_{[j]})+\sum_{k=j+1}^{n}C_{k4}(L_{[k]})},\ j=2,3,\dots,n-1\right\}, \tag{A3}$$

其中 $B_1(L_1), C_{i4}(L_{[i]}),\quad i=2,3,\dots,n$ 和 $C_{i2}^{z_i}(L_{[i]}),\quad i=2,3,\dots,n$ 已经在前面的设计过程中定义.

由(A1)易验证如上所选的 $L_1,\dots,L_n$ 和ε确实是满足公式(44)的一组选择.