中国科学: 数学　2015 年　第 45 卷　第 6 期: 789～794
www.scichina.com　math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

(n,k)- 拟仿正规算子的广义 Weyl 型定理和谱的连续性

高福根*, 张倩

河南师范大学数学与信息科学学院, 新乡 453007
E-mail: gaofugen08@126.com, zhangqian199002@163.com

收稿日期: 2014-06-03; 接受日期: 2014-09-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11301155 和 11271112)、河南省教育厅科学技术研究重点项目 (批准号: 13B110077)、河南师范大学国家级项目培育基金、河南师范大学青年基金和河南师范大学博士科研启动费支持课题 (批准号: qd12102) 资助项目

摘要　若 T 或 T^* 是某可分 Hilbert 空间上的 (n,k)- 拟仿正规算子, 则 $f(T)$ 满足广义 Weyl 定理; 进一步地, 若 T^* 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 则 $f(T)$ 满足广义 a-Weyl 定理, 其中 $f \in H(\sigma(T))$ 满足在其定义域的每一个连通分支上是非常值的. 最后, 证明谱在 (n,k)- 拟仿正规算子类上是连续的.

关键词　(n,k)- 拟仿正规算子　广义 Weyl 定理　广义 a-Weyl 定理　谱的连续性

MSC (2010) 主题分类　47A10, 47B20

1　引言

设 $\mathcal{H}$ 为某可分的复 Hilbert 空间, $\mathcal{C}$ 表示复数域. $B(\mathcal{H})$ 和 $K(\mathcal{H})$ 分别表示 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子全体和紧算子全体. 若 $T \in B(\mathcal{H})$, $\mathrm{ker}T$ 和 $\mathrm{ran}T$ 分别表示 T 的核空间和值域. 令 $\alpha(T) = \dim \mathrm{ker}T$, $\beta(T) = \dim \mathrm{ker}T^*$, $\sigma(T)$ 和 $\sigma_a(T)$ 表示 T 的谱和近似点谱; $p = p(T)$ 和 $q = q(T)$ 表示 T 的升标和降标. 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\mathrm{ran}T$ 是闭的, 且 $\alpha(T) < \infty$ (或 $\beta(T) < \infty$), 则称 T 是上 (或下) 半 Fredholm 算子. 令 $SF_+(\mathcal{H})$ 表示上半 Fredholm 算子全体. 若 $T \in B(\mathcal{H})$ 是上半 Fredholm 算子或下半 Fredholm 算子, 则称 T 是半 Fredholm 算子, 半 Fredholm 算子的指标为 $\mathrm{ind}(T) = \alpha(T) - \beta(T)$. 若 $\alpha(T)$ 和 $\beta(T)$ 均为有限的, 称 T 是 Fredholm 算子. 若 $T \in B(\mathcal{H})$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子, 称 T 是 Weyl 算子; 若 T 是具有有限升和有限降的 Fredholm 算子, 称 T 是 Browder 算子. $\sigma_e(T)$, $\sigma_w(T)$ 和 $\sigma_b(T)$ 分别表示算子 T 的本质谱, Weyl 谱和 Browder 谱. $\mathrm{iso}\mathcal{K}$ 表示 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ 的孤立点. 令 $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \mathrm{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(T-\lambda) < \infty\}$, $\pi_{00}^a(T) = \{\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(T-\lambda) < \infty\}$, $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$. 显然有, $\sigma_e(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) = \sigma_e(T) \cup \mathrm{acc}\sigma(T)$, $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$, 其中 $\mathrm{acc}\sigma(T) = \sigma(T) \setminus \mathrm{iso}\sigma(T)$. 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$, 称 T 满足 Weyl 定理; 若 $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = p_{00}(T)$, 称 T 满足 Browder 定理.

定义 $\sigma_{ea}(T) = \cap\{\sigma_a(T+K) : K \in K(\mathcal{H})\}$ 为 T 的本质近似点谱, $\sigma_{ab}(T) = \cap\{\sigma_a(T+K) : K \in K(\mathcal{H})$ 且 $KT = TK\}$ 为 T 的 Browder 近似点谱. 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ea}(T) = \pi_{00}^a(T)$, 称 T 满足 a-Weyl 定理; 若 $\sigma_{ea}(T) = \sigma_{ab}(T)$, 称 T 满足 a-Browder 定理.

设 $T \in B(\mathcal{H})$, n 为某正整数, T_n 为 T 在 $\mathrm{ran}T^n$ 上的限制, 可看作从 $\mathrm{ran}T^n$ 到 $\mathrm{ran}T^n$ 的一个映射, 特别地, $T_0 = T$. 若对某正整数 n, $\mathrm{ran}T^n$ 是闭的, 且 T_n 是 Fredholm 算子, 则称 T 是 B-Fredholm 算

英文引用格式: Gao F G, Zhang Q. Generalized Weyl's theorem and spectral continuity for (n,k)-quasiparanormal operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 789–794, doi: 10.1360/012015-8

子. B-Fredholm 算子类真包含 Fredholm 算子类 [1]. 设 T 是一个 B-Fredholm 算子, n 为某正整数使得 T_n 是 Fredholm 算子, 则对任意的 $m \geqslant n$, T_m 是 Fredholm 算子, 且 $\operatorname{ind}(T_n) = \operatorname{ind}(T_m)$. T 的指标定义为 Fredholm 算子 T_n 的指标, 参见文献 [1, 定义 2.3]. 若 T 为指标为 0 的 B-Fredholm 算子, 称 T 是一个 B-Weyl 算子. $\sigma_{\mathrm{BF}}(T)$ 和 $\sigma_{\mathrm{BW}}(T)$ 分别为 T 的 B-Fredholm 谱和 B-Wey 谱. 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma_{\mathrm{BW}}(T) = \sigma(T) \setminus \pi_0(T)$, 称 T 满足广义 Weyl 定理, 其中 $\pi_0(T)$ 为 T 的孤立的特征值全体; 若 $\sigma_{\mathrm{BW}}(T) = \sigma(T) \setminus p_0(T)$, 称 T 满足广义 Browder 定理, 其中 $p_0(T)$ T 的预解式的极点全体. 参见文献 [2, 定义 2.13].

令 $SBF_+(\mathcal{H})$ 为上半 B-Fredholm 算子全体, $SBF_+^-(\mathcal{H})$ 为 $SBF_+(\mathcal{H})$ 中满足 $\operatorname{ind}(T) \leqslant 0$ 的算子全体. 令$\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{\lambda \in \mathcal{C} : T - \lambda \notin SBF_+^-(\mathcal{H})\}$ 为 T 的半 B 本质近似点谱. 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \pi_0^a(T)$, 称 T 满足广义的 a-Weyl 定理, 其中 $\pi_0^a(T)$ 表示 T 的为 $\sigma_a(T)$ 的孤立点的特征值全体, 参见文献 [2, 定义 2.13].

由文献 [2–5], 我们有:

广义 a-Weyl 定理 $\Longrightarrow$ 广义 Weyl 定理 $\Longrightarrow$ Weyl 定理 $\Longrightarrow$ Browder 定理,

广义 a-Weyl 定理 $\Longrightarrow$ a-Weyl 定理 $\Longrightarrow$ a-Browder 定理 $\Longrightarrow$ Browder 定理.

Berkani 等人 [2,6] 证明了正规算子满足广义 Weyl 定理. Berkani 和 Arroud [7] 证明了亚正规算子满足广义 Weyl 定理. Curto 和 Han [8] 把上述结果推广到解析的 M- 亚正规算子和解析的仿正规算子; Rashid 等人 [9] 把上述结果推广到拟 A 类算子. 本文中, 我们将证明 (n,k)- 拟仿正规算子满足广义 Weyl 定理.

设 $T \in B(\mathcal{H})$, $p > 0$, 若 $(T^*T)^p - (TT^*)^p \geqslant 0$, 则称 T 是 p- 亚正规算子; 当 $p = 1$, 称 T 是亚正规算子 [10]. 若对任意的 $x \in \mathcal{H}$, $\|Tx\|^2 \leqslant \|T^2x\|\|x\|$, 则称 T 是仿正规算子 [11,12]. 若对任意的正整数 n, $\|T^n\| = \|T\|^n$ (等价地, $\|T\| = r(T)$, $r(T)$ 为 T 的谱半径), 称 T 是 normaloid 算子. 为了更好地研究仿正规算子和 p- 亚正规算子、对数亚正规算子 (T 可逆, $\log T^*T \geqslant \log TT^*$), Furuta 等人 [13] 引入了一类非常有趣的算子类 A 类算子: $|T^2| - |T|^2 \geqslant 0$, 他们证明了 A 类算子包含 p- 亚正规算子和对数亚正规算子, 仿正规类算子包含 A 类算子.

定义 1.1 (参见文献 [14]) 设 $T \in B(\mathcal{H})$, n 和 k 为某正整数, 若对任意的 $x \in \mathcal{H}$,

$$\|T^{1+n}(T^kx)\|^{\frac{1}{(1+n)}}\|T^kx\|^{\frac{n}{(1+n)}} \geqslant \|T(T^kx)\|,$$

则称 T 为 (n,k)- 拟仿正规算子; 若对任意的 $\lambda \in \mathcal{C}$, $T - \lambda$ 是 (n,k)- 拟仿正规算子, 称 T 为完全 (n,k)- 拟仿正规算子.

一般地, 我们有: p- 亚正规算子 $\subseteq$ A 类算子 $\subseteq$ 仿正规类算子 $\subseteq$ n- 仿正规算子 $\subseteq$ (n,k)- 拟仿正规算子.

定义 1.2 (参见文献 [15,16]) 设 $T \in B(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathcal{C}$, 若在 λ 的任何开邻域 $\mathcal{G}$, 满足方程 $(T-\mu)f(\mu) = 0$ $(\forall\, \mu \in \mathcal{G})$ 的唯一的解析函数为 $f \equiv 0$, 称算子 T 在点 λ 处具有单值延拓性质. 若 T 在任意的 $\lambda \in \mathcal{C}$ 处都具有单值延拓性质, 则称 T 具有单值延拓性质.

$T-\lambda$ 的拟幂零部分 $H_0(T-\lambda)$ 和解析核 $K(T-\lambda)$ 分别定义为 $H_0(T-\lambda) = \{x \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda)^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$ 和 $K(T-\lambda) = \{x \in \mathcal{H} :$ 存在一个序列 $\{x_n\} \subseteq \mathcal{H}$ 和 $\delta > 0$ 使得 $x = x_0, (T-\lambda)x_{n+1} = x_n$, $\|x_n\| \leqslant \delta^n\|x\|$, $n = 1, 2, \ldots, \}$. 一般地, $H_0(T-\lambda)$ 和 $K(T-\lambda)$ 是 $T-\lambda$ 非闭的超不变子空间, 满足 $\ker(T-\lambda)^n \subseteq H_0(T-\lambda)$, 其中 $n = 0, 1, 2, \ldots$; $(T-\lambda)K(T-\lambda) = K(T-\lambda)$, 参见文献 [16].

定义 1.3 (参见文献 [15,16]) 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\operatorname{ran}T$ 是闭的, $\ker T \subseteq T^\infty(\mathcal{H}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran}T^n$, 则称 T 是半正则的.

定义 1.4 (参见文献 [15,16]) 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若存在 T 的一对闭的不变子空间 (M, N), 使得 $\mathcal{H} = M \oplus N$, $T|_M$ 是拟幂零的, 且 $T|_N$ 是半正则的, 则称 T 有一个广义的 Kato 分解. 算子 T 在 $\sigma(T)$ 的每一个孤立点处具有广义的 Kato 分解. 进一步地, 若在 $T-\lambda$ 的广义的 Kato 分解中, $(T-\lambda)|_M$ 是幂零的, 则称 T 在点 λ 处是 Kato 型算子.

2 (n,k)- 拟仿正规算子的广义 Weyl 型定理

本节我们将证明: 若 T 或 T^* 是完全的 (n,k)- 拟仿正规算子, 则对任意的 $f \in H(\sigma(T))$, f 在其定义域的每一个连通分支上是非常值的, $f(T)$ 满足广义 Weyl 定理, 其中 $H(\sigma(T))$ 表示在包含 $\sigma(T)$ 的某邻域上解析函数的全体; 进一步地, 若 T^* 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 则 $f(T)$ 满足广义的 a-Weyl 定理.

设 $T \in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma(T)$ 的每一个孤立点是 T 的特征值, 则称 T 是 isoloid 算子; 若 $\sigma(T)$ 的每一个孤立点是 T 的预解式的极点, 则称 T 是 polaroid 算子 [15]. 一般地, 若 T 是 polaroid 算子, 则 T 是 isoloid 算子.

引理 2.1 设 $T \in B(\mathcal{H})$ 是拟幂零的 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则 T 是幂零的.

证明 若 $\mathrm{ran}T^k$ 是稠密的, 则 T 是 n- 仿正规算子. 由文献 [17, 命题 1], n- 仿正规算子是 normaloid 算子, 故 $T = 0$. 若 $\mathrm{ran}T^k$ 不是稠密的, 由文献 [14, 定理 2.6], T 在 $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{ran}T^k} \oplus \ker T^{*k}$ 上可表示为

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix},$$

其中 T_1 是 $\overline{\mathrm{ran}T^k}$ 上的 n- 仿正规算子, $T_3^k = 0$, 且 $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$. 由 T 是拟幂零的, 可得 $T_1 = 0$. 因此

$$T^{1+k} = \begin{pmatrix} 0 & T_2T_3^k \\ 0 & T_3^{1+k} \end{pmatrix} = 0.$$

故 T 是幂零的. □

定理 2.2 设 $T \in B(\mathcal{H})$ 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则 T 具有单值延拓性质, T 和 T^* 均是 polaroid 算子. 特别地, T 和 T^* 均是 isoloid 算子.

证明 设 T 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 由文献 [14, 定理 4.1], T 具有单值延拓性质.

假设 λ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点. 令 $M = K(T-\lambda)$, $N = H_0(T-\lambda)$, 则 (M,N) 是 $T-\lambda$ 的广义 Kato 分解. 因为 $(T-\lambda)|_N$ 是拟幂零的 (n,k)- 拟仿正规算子, 由引理 2.1 可得 $(T-\lambda)|_N$ 是幂零的. 故 $T-\lambda$ 是 Kato 型算子. T 和 T^* 在点 λ 处均具有单值延拓性质, 由文献 [18, 定理 2.3], $p(T-\lambda)$ 和 $q(T-\lambda)$ 都是有限的. 故 λ 是 T 的预解式的极点. 所以 T 是 polaroid 算子.

类似地, 我们证明 T^* 是 polaroid 算子. 假设 λ 是 $\sigma(T^*)$ 的孤立点. 我们有 $\overline{\lambda}$ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点. 由上述的证明, $\overline{\lambda}$ 是 T 的极点. 因此存在一个自然数 n, 使得 $n = p(T-\overline{\lambda}) = q(T-\overline{\lambda})$. 所以

$\mathcal{H}=\ker(T-\overline{\lambda})^n\oplus\operatorname{ran}(T-\overline{\lambda})^n$, 且 $\operatorname{ran}(T-\overline{\lambda})^n$ 是闭的. 故我们有 $\mathcal{H}=(\ker(T-\overline{\lambda})^n)^\perp\oplus(\operatorname{ran}(T-\overline{\lambda})^n)^\perp=\operatorname{ran}(T^*-\lambda)^n\oplus\ker(T^*-\lambda)^n$. 因此 $p(T^*-\lambda)=q(T^*-\lambda)<\infty$, 即, λ 是 T^* 的预解式的极点. 所以 T^* 是 polaroid 算子. □

定理 2.3 设 $T\in B(\mathcal{H})$ 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则 $f(T)$ 满足广义 a-Weyl 定理, 其中 $f\in H(\sigma(T))$ 满足在其定义域的每一个连通分支上是非常值的.

证明 假设 $T\in B(\mathcal{H})$ 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 由定理 2.2, T 是 polaroid 算子, 且具有单值延拓性质. 由文献 [19, 定理 3.14] 可得结论成立. □

设 $T\in B(\mathcal{H})$, 若 $\sigma_a(T)$ 的每一个孤立点是 T 的特征值, 则称 T 是 a-isoloid 算子 [15]. 一般地, a-isoloid 算子是 isoloid 算子, 反之不一定成立.

定理 2.4 设 $T\in B(\mathcal{H})$ 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则 T 是 a-isoloid 算子.

证明 假设 λ 是 $\sigma_a(T)$ 的孤立点. $T\in B(\mathcal{H})$ 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 由定理 2.2, T^* 具有单值延拓性, 且 T 是 polaroid 算子. 故由文献 [20, 推论 7], $\sigma_a(T)=\sigma(T)$. 故 λ 是 $\sigma(T)$ 的孤立点. 由 T 是 isoloid 算子, 可得 λ 是 T 的特征值. □

定理 2.5 设 T^* 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则 $f(T)$ 满足广义的 Weyl 定理和广义的 a-Weyl 定理, 其中 $f\in H(\sigma(T))$ 满足在其定义域的每一个连通分支上是非常值的.

证明 假设 T^* 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 由定理 2.2, T^* 具有单值延拓性质, T 是 polaroid 算子. 因此由文献 [19, 定理 3.12] 可得结论成立. □

3 (n,k)- 拟仿正规算子的谱的连续性

设 $\{\tau_n\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一列紧子集. 称 $\lim\inf\{\tau_n\}=\{\lambda\in\mathcal{C}:$ 存在 $\lambda_n\in\tau_n$ 使得 $\lambda_n\longrightarrow\lambda\}$ 为 $\{\tau_n\}$ 的下极限; 称 $\lim\sup\{\tau_n\}=\{\lambda\in\mathcal{C}:$ 存在 $\lambda_{n_k}\in\tau_{n_k}$ 使得 $\lambda_{n_k}\longrightarrow\lambda\}$ 为 $\{\tau_n\}$ 的上极限. 若 $\lim\inf\{\tau_n\}=\lim\sup\{\tau_n\}$, 则称 $\{\tau_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim\{\tau_n\}$. $B(\mathcal{H})$ 上的映射 p, 其取值是 $\mathcal{C}$ 的紧子集, 若满足当 $T_n\longrightarrow T$ 时, $\lim\sup p(T_n)\subset p(T)$ (resp. $p(T)\subset\lim\inf p(T_n)$), 则称 p 在 T 处是上半 (或下半) 连续的. 若 p 在 T 处既是上半连续又是下半连续的, 则称 p 在 T 处是连续的, 记作 $\lim p(T_n)=p(T)$.

对任意的 $T\in B(\mathcal{H})$, $\sigma(T)$ 是 $\mathcal{C}$ 的紧子集. σ 可看作一个从 $B(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{C}$ 的所有紧子集所构成的集合上的一个映射, 由 Hausdorff 度量, 可知 σ 是上半连续的, 但不是连续的. Conway 和 Morrel [21] 研究了 $B(\mathcal{H})$ 上谱的连续性. 最近, Farenick 和 Lee [22], Hwang 和 Lee [23] 研究了 Toeplitz 算子所构成的子空间上的谱的连续性. Halmos [24] 证明了 σ 在正规算子和亚正规算子类上是连续的. Djordjević [25] 证明了 σ 在拟亚正规算子类上, Hwang 和 Lee [26] 证明了 σ 在 p- 亚正规算子类上, Duggal 等人 [27] 证明了 σ 在 (p,k)- 拟亚正规算子类, M- 亚正规算子类, $*$- 仿正规算子类和仿正规算子类上均是连续的. 本文中, 我们把这个结果推广到 (n,k)- 拟仿正规算子类.

引理 3.1 设 T 是 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 则下列论断成立:

(1) 若 T 是拟幂零的 (即, $\sigma(T)=\{0\}$), 则 T 是幂零的.

(2) 对任意非零的 $\lambda\in\sigma_p(T)$, 在 $\mathcal{H}=\ker(T-\lambda)\oplus(\ker(T-\lambda))^\perp$ 上 T 的矩阵表示为

$$T=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

其中 B 满足 $\lambda \notin \sigma_p(B)$, $\sigma(T)=\{\lambda\}\cup\sigma(B)$.

证明 设 T 是 (n,k)- 拟仿正规算子, n, k 为某正整数. 由引理 2.1, (1) 成立; 由文献 [14, 推论 3.2], (2) 成立. □

由 Berberian 扩张定理 [28], 设 $T\in B(\mathcal{H})$, 存在 $\mathcal{K}\supseteq\mathcal{H}$ 和一个保序的 $*$- 等距同构: $T\to T^\circ\in B(\mathcal{K})$, 满足 $\sigma(T)=\sigma(T^\circ)$, $\sigma_p(T^\circ)=\sigma_a(T^\circ)=\sigma_a(T)$. 详见如下引理.

引理 3.2 (参见文献 [28]) 设 $\mathcal{H}$ 是复的 Hilbert 空间. 则存在一个复的 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$, 使得 $\mathcal{H}\subset\mathcal{K}$ 和映射 $\varphi: B(\mathcal{H})\longrightarrow B(\mathcal{K})$ 满足:

(1) φ 是 $B(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{K}$ 上的一个忠实的 $*$- 表示, 即对任意的 $S,T\in B(\mathcal{H})$ 和 $\lambda\in\mathcal{C}$, 有 $\varphi(S+T)=\varphi(S)+\varphi(T)$, $\varphi(\lambda T)=\lambda\varphi(T)$, $\varphi(ST)=\varphi(S)\varphi(T)$, $\varphi(T^*)=(\varphi(T))^*$, $\varphi(I)=I$, $\|\varphi(T)\|=\|T\|$.

(2) $\varphi(A)\geqslant 0$, 其中 $A\in B(\mathcal{H})$, 且 $A\geqslant 0$.

(3) 对任意的 $T\in B(\mathcal{H})$, $\sigma_a(T)=\sigma_a(\varphi(T))=\sigma_p(\varphi(T))$.

定理 3.3 谱 σ 在 (n,k)- 拟仿正规算子类上是连续的, 其中 n, k 为某正整数.

证明 设 T 是 (n,k)- 拟仿正规算子, 其中 n, k 为某正整数. 设 $\varphi: B(\mathcal{H})\longrightarrow B(\mathcal{K})$ 为引理 3.2 中的 Berberian 忠实的 $*$- 表示. 下面我们将证明 $\varphi(T)$ 是 (n,k)- 拟仿正规算子. 事实上, 设 T 是 (n,k)- 拟仿正算子, 由文献 [14, 引理 2.2], 对 $\forall\lambda>0$, $T^{*k}(|T^{1+n}|^2-(1+n)\lambda^n|T|^2+n\lambda^{1+n})T^k\geqslant 0$. 故

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(T))^{*k}(|(\varphi(T))^{1+n}|^2-(1+n)\lambda^n|\varphi(T)|^2+n\lambda^{1+n})(\varphi(T))^k\\
&=\varphi(T^{*k}(|T^{1+n}|^2-(1+n)\lambda^n|T|^2+n\lambda^{1+n})T^k)\ (\text{由引理 } 3.2(1))\\
&\geqslant 0\ (\text{由引理 } 3.2(2)).
\end{aligned}
$$

所以 T 的 Berberian 扩张 $T^\circ=\varphi(T)$ 也是 (n,k)- 拟仿正规算子. 由引理 3.1, $T\in\mathcal{C}(i)$ ($\mathcal{C}(i)$ 的定义参见文献 [27]). 由文献 [27, 定理 1.1], 谱 σ 在 (n,k)- 拟仿正规算子类上是连续的. □

推论 3.4 Weyl 谱 σ_w 在完全 (n,k)- 拟仿正规算子类上是连续的当且仅当 Browder 谱 σ_b 在完全 (n,k)- 拟仿正规算子类上是连续的, 其中 n, k 为某正整数.

证明 设 T 是完全 (n,k)- 拟仿正规算子. 由定理 2.3, T 满足 Weyl 定理, 故 T 满足 Browder 定理. 因此由文献 [29, 注记] 或文献 [3, 定理 2.2] 可得结论成立. □

参考文献

1 Berkani M. On a class of quasi-Fredholm operators. Integral Equation Operator Theory, 1999, 34: 244–249
2 Berkani M, Koliha J J. Weyl type theorems for bounded linear operators. Acta Sci Math (Szeged), 2003, 69: 359–376
3 Djordjević S V, Han Y M. Browder's theorem and spectral continuity. Glasgow Math J, 2000, 42: 479–486
4 Rakočević V. On the essential approximate point spectral II. Math Vesnik, 1984, 36: 89–97
5 Rakočević V. Operators obeying a-Weyl's theorem. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1989, 34: 915–919
6 Berkani M. B-Weyl spectrum and poles of the resolvent. J Math Anal Appl, 2002, 272: 596–603
7 Berkani M, Arroud A. Generalized Weyl's theorem and hyponormal operators. J Aust Math Soc, 2004, 76: 291–302
8 Curto R E, Han Y H. Generalized Browder's and Weyl's theorems for Banach space operators. J Math Anal Appl, 2007, 336: 1424–1442
9 Rashid M H M, Noorani M S M, Saari A S. Weyl's type theorems for quasi-class A operators. J Math Statis, 2008, 4: 70–74
10 Aluthge A. On p-hyponormal operators for $0<p<1$. Integral Equation Operator Theory, 1990, 13: 307–315
11 Furuta T. On the class of paranormal operators. Proc Japan Acad, 1967, 43: 594–598
12 Furuta T. Nvitation to Linear Operators. London: Taylor and Francis, 2001

13 Furuta T, Ito M, Yamazaki T. A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several classes. Sci Math, 1998, 1: 389–403
14 Yuan J, Ji G. On (n,k)-quasiparanormal operators. Studia Math, 2012, 209: 289–301
15 Aiena P. Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004
16 Laursen K B, Neumann M M. Introduction to Local Spectral Theory. Oxford: Clarendon Press, 2000
17 Kubrusly C S, Duggal B P. A note on k-paranormal operators. Operators and Matrices, 2010, 4: 213–223
18 Aiena P. Classes of operators satisfying a-Weyl's theorem. Studia Math, 2005, 169, 105–122
19 Aiena P, Aponte E, Balzan E. Weyl type theorems for left and right polaroid operators. Integral Equation Operator Theory, 2010, 66: 1–20
20 Finch J K. The single valued extension property on a Banach space. Pacific J Math, 1975, 58: 61–69
21 Conway J B, Morrel B B. Operators that are points of spectral continuity. Integral Equation Operator Theory, 1979, 2: 174–198
22 Farenick D R, Lee W Y. Hyponormality and spectra of Toeplitz operators. Trans Amer Math Soc, 1996, 348: 4153–4174
23 Hwang I S, Lee W Y. On the continuity of spectra of Toeplitz operators. Arch Math, 1998, 70: 66–73
24 Halmos P R. A Hilbert Space Problem Book. New York: Springer-Verlag, 1982
25 Djordjević S V. Continuity of the essential spectrum in the class of quasihyponormal operators. Vesnik Math, 1998, 50: 71–74
26 Hwang I S, Lee W Y. The spectrum is continuous on the set of p-hyponormal operators. Math Z, 2000, 235: 151–157
27 Duggal B P, Jeon I H, Kim I H. Continuity of the spectrum on a class of upper triangular operator matrices. J Math Anal Appl, 2010, 370: 584–587
28 Berberian S K. Approximate proper vectors. Proc Amer Math Soc, 1962, 13: 111–114
29 Sánchez-Perales S, Djordjević S V. Continuity of spectra and compact perturbations. Bull Korean Math Soc, 2011, 48: 1261–1270

Generalized Weyl's theorem and spectral continuity for (n,k)-quasiparanormal operators

GAO FuGen & ZHANG Qian

Abstract If T or T^* is a totally (n,k)-quasiparanormal operator acting on an infinite dimensional separable Hilbert space, then we prove that generalized Weyl's theorem holds for $f(T)$ for every $f \in H(\sigma(T))$ which is nonconstant on each connected component of its domain. Moreover, if T^* is a totally (n,k)-quasiparanormal operator, then generalized a-Weyl's theorem holds for $f(T)$ for every $f \in H(\sigma(T))$ which is nonconstant on each connected component of its domain. Also, we prove that the spectrum is continuous on the class of all (n,k)-quasiparanormal operators.

Keywords (n,k)**-quasiparanormal operator, generalized Weyl's theorem, generalized** a**-Weyl's theorem, continuity of the spectrum**

MSC(2010) 47A10, 47B20

doi: 10.1360/012015-8