中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 10 期: 1611～1618
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综 述

Riemann-Finsler 几何中的若干问题

沈一兵

浙江大学数学科学学院, 杭州 310027
E-mail: yibingshen@zju.edu.cn

收稿日期: 2015-06-17; 接受日期: 2015-08-12
国家自然科学基金 (批准号: 11171297 和 11471246) 资助项目

摘要 Finsler 几何是比 Riemann 几何更一般的微分几何, 近几十年来取得了全新的实质性进展. 本文就若干尚未解决的整体 Finsler 几何问题作一概要的综述, 主要涉及 Finsler 子流形几何、Finsler 流形的曲率和拓扑, 以及 Finsler-Einstein 度量.

关键词 Finsler 流形 等距浸入 Finsler-Einstein 度量
MSC (2010) 主题分类 53C60, 53B40

1 引言

"Finsler 几何就是没有二次型限制的 Riemann 几何." 这是已故著名几何学泰斗陈省身 (Chern Shiing-Shen) 先生的话. 事实上, 早在 1854 年, Riemann 在他的著名就职演说中已提出了后来所称的 Finsler 几何的概念, 他看到了度量的二次型情形 (即通常所称的 Riemann 度量) 与一般情形的区别, 并选择前者为代表进行系统研究. 直到 1918 年, Finsler 才研究了一般度量情形下曲线与曲面的几何. 此后, 人们就习惯把一般度量情形的几何称为 Finsler 几何. 因此, 更确切的称呼应是 Riemann-Finsler 几何[1]. 为简单计, 以下就称 Finsler 几何.

在通常意义下, 度量是用来计算空间 (有限维光滑流形) 中两点之间曲线的长度. 设 M 是一个 n 维光滑微分流形, 其上一参数曲线段 $c=c(t)$ 是一映射 $c:[a,b]\to M$, $t\in[a,b]$. 在 M 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 下, 它可表示为 $x^i=x^i(t)$. c 的切向量 $\dot{c}$ 可表示为

$$\dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}.$$

为了测量 c 的长度, 我们必须在 M 上给定一个度量 ds, 也称为线 (弧) 素. 例如, 若我们给出一个 Riemann 度量

$$ds=\sqrt{g_{ij}(x)dx^idx^j},$$

则 c 的长度 $L_g(c)$ 是

$$L_g(c)=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^j}dt.$$

英文引用格式: Shen Y B. Several problems in Riemann-Finsler geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1611–1618, doi: 10.1360/N012015-00214

上述被积函数的平方是关于 $\dot{x}^i$ 的正定二次型. 一般地, 我们可以不受这样的限制, 而取被积函数为定义在切丛 TM 上的 $2n$ 个变量的非负函数 $F(c(t),\dot{c}(t))$, 从而, c 的长度 $L_F(c)$ 是

$$L_F(c)=\int_a^b F(c(t),\dot{c}(t))dt.$$

为了使 $L_F(c)$ 与曲线的参数化无关, 自然要求 F 关于 $\dot{c}$ 是正一次齐次的, 即

$$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y),\quad \lambda>0,$$

其中 $x\in M$ 是流形上的点, $y\in T_xM$ 是在点 x 的切向量.

定义 1 设 M 是一个 n 维光滑流形, $F:TM\to[0,+\infty)$ 是其切丛上的非负函数. 若 F 满足

(1) 正齐性: $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y), \forall\,\lambda>0$;

(2) 光滑性: 在带孔切丛 $TM\backslash\{0\}$ 上, $F(x,y)$ 是光滑函数;

(3) 正则性: 对于任意非零向量 $y\neq 0$, 矩阵 (g_{ij}) 是正定的, 其中

$$g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}(x,y),$$

则称 F 为 M 上的一个 Finsler 度量 (Finsler metric). 二次型

$$g=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j$$

称为基本二次型, 或基本张量. 显然, 若 g_{ij} 与 y 无关, 则这就是 Riemann 度量.

近几十年来, 特别是在陈省身先生的倡导下, Finsler 几何的研究取得了全新的实质性进展, 发展了像整体 Riemann 几何那样的整体 Finsler 几何, 使 Finsler 几何的面貌大为改观. 如果说 Riemann 几何是一幅深刻描述空间形态的黑白图画, 那么, Finsler 几何就是这种描述的绚丽多姿的彩色画卷. 遵循陈省身先生的教导: "微分几何的最终目的是整体的结果", 本文就作者感兴趣的若干尚未解决的 Finsler 几何问题概述如下, 企盼抛砖引玉.

2 Finsler 子流形几何

2.1 Finsler 流形的等距浸入

度量空间的等距浸入 (嵌入) 历来是微分几何的极重要问题之一. 设 (M,F) 和 $(N,\widetilde{F})$ 是两个度量空间, 它们分别具有度量 F 和 $\widetilde{F}$. 若浸入 (嵌入) $f:M\to N$ 满足

$$f^*\widetilde{F}=F,$$

则称 f 是一个等距浸入 (嵌入), 这时, 我们就称 (M,F) 能等距浸入 (嵌入) 到 $(N,\widetilde{F})$ 中. 最自然而重要的情形是 $(N,\widetilde{F})$ 为 Euclid 空间, 这时, $F=f^*\widetilde{F}$ 是 Riemann 度量. Cartan (1927) 和 Janet (1926) 分别证明了, 每个解析的 n 维 Riemann 流形都可以局部地等距浸入到 $n(n+1)/2$ 维 Euclid 空间中 (Schläfli 猜想, 1873). 后来, 经过 Nash (1954–1956) 和 Gromov (1985–1986) 的工作, 现在已知, 每个 C^α $(2\leqslant\alpha\leqslant+\infty)$ 可微的 (紧致) Riemann 流形都可以局部或整体地等距浸入 (嵌入) 到充分高维数的 Euclid 空间中作为子流形 [2].

在 Finsler 几何中, Minkowski 空间就是没有二次型限制的 Euclid 空间, 即基本二次型的系数 $g_{ij}(y)$ 仅与方向 y 有关. Minkowski 空间中子流形上的诱导度量一般是 Finsler 度量[3]. 因此, 考虑 Finsler 流形到 Minkowski 空间的等距浸入问题是十分自然的. 20 世纪五十年代, 谷超豪[4] 曾考虑过这个问题.

设 (M,F) 是一 Finsler 流形, 它的 Cartan 张量是

$$\boldsymbol{C}=C_{ijk}(x,y)dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k,$$

其中 $C_{ijk}:=\frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}$. 显然, F 为 Riemann 度量的充要条件是 $\boldsymbol{C}=0$. Cartan 张量在点 $x\in M$ 的模 $\|\boldsymbol{C}\|_x$ 定义为

$$\|\boldsymbol{C}\|_x:=\sup_{y,v\in S_xM}\frac{|\boldsymbol{C}_{(x,y)}(v,v,v)|}{|g_{(x,y)}(v,v)|^{3/2}}.$$

1998 年, 沈忠民教授得到了下面的定理.

定理 1 [5] 如果 Finsler 流形 (M,F) 的 Cartan 张量的模无界, 则 (M,F) 不能等距浸入到任何 Minkowski 空间中.

因此, 自然有下列问题.

问题 1 Cartan 张量模有界的一个 C^α $(2\leqslant\alpha\leqslant+\infty)$ 可微的 Finsler 流形是否能局部或整体地等距浸入 (嵌入) 到充分高维数的 Minkowski 空间中?

2.2 等参超曲面和闭测地线

在整体子流形几何中, 等参超曲面 (子流形) 是十分重要的研究对象之一. 在 Riemann 情形下, 空间形式中的等参超曲面已被许多几何学家所研究, 并取得了丰硕的成果 (参见文献 [6]). 最近, 唐梓洲教授和他的学生们在这方面取得了不少新结果 (参见文献 [7]). 但在 Finsler 几何中, 据作者所知, 迄今尚无等参超曲面的研究.

我们可以类似于 Riemann 情形定义 Finsler 流形上的等参函数. 设 $(M,F,d\mu)$ 是具有体积元 $d\mu$ 的 n 维 Finsler 流形. 若 M 上的函数 f 满足下列条件:

$$\begin{cases}F(\nabla f)=\tilde{a}(f),\\ \Delta f=\tilde{b}(f),\end{cases}$$

其中 $\tilde{a}(t)$ 是光滑函数, $\tilde{b}(t)$ 是连续函数, 则称 f 是一个等参函数; ∇f 是微分 df 通过 Legendre 变换而得的梯度向量, Δ 表示关于体积元 $d\mu$ 的非线性 Laplace 算子[8]. 于是, $(M,F,d\mu)$ 中一个等参函数 f 的任何正则水平 (level) 超曲面 ($f=$ 常数) 都称为 $(M,F,d\mu)$ 的等参超曲面.

最近, 我们研究了这种超曲面, 特别是 Minkowski 空间中的等参超曲面[9]. 例如, 我们证得如下:

(i) 设 $(M,F,d\mu)$ 是一个具有常数旗曲率和常数 $\mathbf{S}$ 曲率的 n 维 Finsler 流形, 则 $(M,F,d\mu)$ 中等参超曲面的主曲率必是常数;

(ii) 在一个具有 Busemann-Hausdorff (或 Holmes-Thompson) 体积元 $d\mu$ 的 n 维 Randers-Minkowski 空间 (V,F) 中, 任何等参超曲面最多只有两个不同的常主曲率.

因此, 希望考虑下列问题.

问题 2 在具有常数旗曲率和常数 $\mathbf{S}$ 曲率的向前完备 Finsler 流形中如何讨论等参超曲面? 特别是 Funk 流形中的等参超曲面.

对于一维子流形, 最重要和最有趣的就是闭测地线. 在 Riemann 情形下, 我们知道, 在每个单连通的闭曲面上, 存在三条简单的闭测地线. 著名的 Klingenberg 定理说: 在一个紧致单连通的曲率 1/4 拼挤 (pinched) 的 n 维 Riemann 流形 M 上, 存在 n 条不同的简单闭测地线[10]. 近年来, 龙以明教授和他的学生们, 对 Finsler 流形上的闭测地线作了许多研究, 得到了不少重要结果 (参见文献 [11,12]). 一个有趣的问题如下.

问题 3 (Anosov)　在任何 n ($\geqslant 2$) 维的 Finsler 拓扑球面上, 是否至少存在两条不同的闭测地线?

3　Finsler 流形的曲率和拓扑

3.1　Gauss-Bonnet-Chern 公式

在古典微分几何中, 紧致闭曲面 M 的 Gauss-Bonnet 公式是 $\int_M KdA = 2\pi\chi(M)$, 其中 K 是 M 的 Gauss 曲率, $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数. 这个公式在高维 Riemann 流形上的推广曾被不少数学家关注和研究, 如 Alexandroff, Fenchel 和 Weil 等. 他们都把 Riemann 流形看作 Euclid 空间的子流形进行讨论. 1944 年, 陈省身先生第一个用完全内蕴的方法 (不看作 Euclid 子流形) 给出了紧致闭 Riemann 流形的 Gauss-Bonnet 公式[13], 后人称为 Gauss-Bonnet-Chern 公式.

最早把该公式推广到 Finsler 几何的是 Lichnerowicz (1949), 他考虑的是 Cartan-Berwald 空间的 Cartan 联络. 直到 1996 年, Bao 和 Chern [14] 才给出了较一般 Finsler 流形的 Gauss-Bonnet-Chern 公式, 他们要求 Finsler 流形在每点 $x \in M$ 的标形 (indicatrix) S_xM 具有常值体积, 并且考虑的是无挠的 Chern 联络. 后来, 沈忠民也使用了与度量相容的联络 (如 Cartan 联络). 为了克服文献 [14] 中对 Finsler 流形的限制, 2002 年, Lackey [15] 给出了关于 Chern 联络的一般 Finsler 流形的 Gauss-Bonnet-Chern 公式, 但引入了一个具有孤立奇点的向量场. 2013 年, Zhao [16] 用不同于文献 [15] 的方法, 给出了关于与度量相容联络的一般 Finsler 流形的类似公式. 综合他们的工作, 我们可表述如下.

定理 2 [15, 16]　设 (M,F) 是一 n 维的紧致闭 Finsler 流形, 具有无挠的或与度量相容的联络 D, X 是 M 上任一具有孤立奇点 $\{x_i\}$ 的向量场, 则有

$$\int_M [X]^* \left(\frac{\mathbf{\Omega}^D + (\mathfrak{E} + \mathfrak{D})}{\mathrm{Vol}_g(S_xM)} \right) = \frac{\chi(M)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})},$$

其中 $[X] : M \setminus \bigcup \{x_i\} \to SM$ 是由 X 诱导的截面, $\mathfrak{E}$ 是 SM 上的恰当 n 形式, $\mathfrak{D}$ 是 SM 上的 n 形式, $\chi(M)$ 是 M 的示性数,

$$\Omega^D = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p p!} \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2p-1}}^{i_{2p}}, & n = 2p, \\ 0, & n = 2p+1, \end{cases}$$

这里 $\epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} = \delta_{i_1 \dots i_{2p}}^{1 \dots 2p}$ 是多重 Kronecker delta, (Ω_j^i) 是 D 的曲率形式.

最近, 冯惠涛教授和他的学生对具有殆复结构的闭 Finsler 流形, 给出了一个类似于 Riemann 情形的 Gauss-Bonnet-Chern 公式, 其中没有用到具有孤立奇点的向量场 (参见文献 [17]). 应当指出, 复 Finsler 向量丛的几何与分析极其重要, 我国学者在这方面已作出了不少贡献 (参见文献 [18]). 现在自然有下面的问题.

问题 4　不用任何向量场, 是否能建立一般 Finsler 流形的 Gauss-Bonnet-Chern 公式?

3.2 关于球面定理

球面定理是微分几何中的一类重要的整体性结果. 在 Riemann 情形下, 目前最好的结果是, 设 (M,g) 是紧致单连通的曲率 1/4 拼挤的 n $(\geqslant 4)$ 维 Riemann 流形, 则 (M,g) 微分同胚于标准 n 维球面 (参见文献 [19]).

在 Finsler 几何中, Kern (1971) 对几乎为 Riemann 流形的旗曲率拼挤的 Finsler 流形, 证明了一个微分球面定理. 此外, Dazord (1968) 和沈忠民 (2001) 分别对可反的 Finsler 流形 (即 $F(x,-y) = F(x,y)$) 给出了某种同胚球面定理. 2004 年, Rademacher [20] 证明了下列同伦球面定理.

定理 3 [20] 设 (M,F) 是 n $(\geqslant 3)$ 维单连通闭 Finsler 流形, 其可反系数为 $\lambda < \infty$. 若它的旗曲率 K 满足

$$\left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right)^2 < K \leqslant 1,$$

则 M 同伦于球面 $\mathbf{S}^n$.

注意, 当 F 为 Riemann 度量时, $\lambda = 1$, 上式左边等于 1/4. 可惜的是, 文献 [20, 引理 9] 的证明不太严谨, 从而使定理的证明不完备.

问题 5 是否能给出上述定理的一个完整证明? 进一步, 我们能否建立类似的微分球面定理?

3.3 关于有限性定理和核心 (soul) 定理

在整体 Riemann 几何中, 著名的 Cheeger 有限性定理 [21] 说: 已给常数 $n \in \mathbb{N}$, $K, d, v \in \mathbb{R}^+$, 则在满足条件

$$\{|\mathrm{Sec}| \leqslant K, \mathrm{Diam} \leqslant d, \mathrm{Vol} \geqslant v\}$$

的紧致 Riemann 流形族中, 只存在有限多个微分同胚型, 其中 Sec 表示截面曲率, Diam 是流形的直径, Vol 是流形的体积. 另一方面, 对于截面曲率非负的完备 Riemann 流形 M, 核心 (soul) 定理 [21,22] 断言: M 必包含一个全测地的凸子流形 $S \subset M$ 作为核心, 使得 M 微分同胚于 S 的法丛. 就作者所知, 这些美好的结果至今尚未推广到 Finsler 几何.

若一个 Finsler 流形各点的切空间都线性等距于同一个 Minkowski 空间, 则称它为 Berwald 流形. 这是一类十分重要的 Finsler 流形, 它们被看作介于 Riemann 流形和一般 Finsler 流形的中间. 最近, 我们得到了下面的定理.

定理 4 [23] 已给常数 $n \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ 和 $v, d > 0$, 设 $\mathfrak{M}(n, \Lambda, k, V, D)$ 是一族 n 维紧致 Berwald 流形 (M,F), 满足下列条件:

$$|K_F| \leqslant k, \quad \Lambda_F \leqslant a, \quad \mathrm{Diam} \leqslant d, \quad \mathrm{Vol} \geqslant v,$$

其中 K_F 表示旗曲率, Λ_F 表示 (M,F) 的一致常数, Diam 是流形的直径, Vol 是 (M,F) 关于 Busemann-Hausdorff (或 Holmes-Thompson) 体积元的体积, 则在 $\mathfrak{M}(n, \Lambda, k, V, D)$ 中只存在有限多个微分同胚型.

问题 6 对一般的 Finsler 流形, 是否有类似的有限性定理? 核心 (soul) 定理是否能推广到 Finsler 几何?

4 关于 Einstein 度量

众所周知, Einstein 的广义相对论有力推动了 Riemann 几何的发展. 为了记念这位伟大的物理学

家, 人们把高维空间中 Ricci 张量与度量张量成比例的 Riemann 度量称为 Einstein 度量.

这个概念也被推广到 Finsler 几何中, 现用张量语言简介如下. 设 (x^i, y^i) 是 n 维 Finsler 流形 (M, F) 的切丛 TM 上的局部坐标 $(i, j, \ldots = 1, \ldots, n)$, 用

$$G^i = \frac{1}{4} g^{ij} \{[F^2]_{y^j x^k} y^k - [F^2]_{x^j}\}$$

表示它的测地系数 (参见文献 [8]). 于是 (M, F) 的 Riemann 曲率张量为

$$R^i_j = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - y^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j} + 2G^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} - \frac{\partial G^i}{\partial y^k}\frac{\partial G^k}{\partial y^j}.$$

Finsler 流形 (M, F) 的 Ricci 曲率定义为 $\mathrm{Ric}_F := R^i_i$. 若存在 M 上的数量函数 $K(x)$, 使得

$$\mathrm{Ric}_F(x, y) = (n-1)K(x)F^2(x, y),$$

则 F 称为 Finsler-Einstein 度量.

问题 7 (陈省身) 在每个光滑流形上, 是否总存在 Finsler-Einstein 度量?

对于这个问题, Bao 和 Robles [24] 自然想到了几何分析的 Ricci 流方法. 他们引入了如下的流方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \log F = -\mathrm{Ric}_F,$$

它的规范形式是

$$\frac{\partial}{\partial t} \log F = -\mathrm{Ric}_F + r, \quad r = \frac{1}{\mathrm{Vol}(SM)} \int_{SM} \mathrm{Ric}_F \, dV_{SM}.$$

但是, 在 Finsler 流形 (M, F) 上, 关于这类方程的解, 至今没有任何进展.

为此, 考虑一类特殊的 Finsler 度量. 由一个 Riemann 度量 α 和一个 1 形式 β 可构成一个形如 $F = \alpha + \beta$ 的 Finsler 度量 ($\|\beta\|_\alpha < 1$), 称为 Randers 度量. 它是由物理学家 Randers (1941) 提出来的. 2004 年, Bao 等人[25] 得到了下列结果: 设 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 是由 Riemann 度量 h 和向量场 V 通过 Zermelo 导航术 (参见文献 [8, 第 5.4 小节]) 得到的. 那么, F 是 Finsler-Einstein 度量的充要条件是, 存在常数 c 使得

(i) h 是一个 Riemann-Einstein 度量, 它的 Ricci 曲率为

$$\mathrm{Ric}_h = (n-1)(K(x) + c^2);$$

(ii) V 是关于 h 的无穷小相似向量场, 相似系数为 c.

由此即知, (1) 对于任何 n ($\geqslant 3$) 维的 Randers-Einstein 度量 F, $K(x)$ 必为常数; (2) 一个 3 维的 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 为 Einstein 度量的充要条件是 F 具有常数旗曲率. 这些工作为在光滑流形上构造 Randers-Einstein 度量提供了有效方法.

另一方面, 在 Riemann 情形下, 流形 M 上的 Einstein 度量是 Hilbert-Einstein 泛函

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}^{1-2/n}(M)} \int_M \rho dV_M$$

的临界点, 其中 ρ 是对应 Riemann 度量的数量曲率. 1995 年, Akbar-Zadeh [26] 把它推广到 Finsler 几何. 他在 Finsler 流形 (M, F) 上, 定义广义 Hilbert-Einstein 泛函为

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{\mathrm{Vol}^{1-2/n}(SM)} \int_{SM} \mathrm{Ric}_F dV_{SM}.$$

然后证明, Finsler-Einstein 度量是这个泛函的临界点. 不幸的是, 文献 [26] 的计算有误 (参见文献 [27]).

我们计算了这个泛函的 Euler-Lagrange 方程为 (参见文献 [8, 27])

$$F^2 g^{ik}[\mathrm{Ric}_F]_{y^i y^k} + (n-2)(\mathrm{Ric}_F - r) + 2\mathrm{div}_{\hat{g}}\kappa = 0,$$

其中

$$\kappa = J_i dx^i + \dot{J}_i \delta y^i, \quad J_i = g_{ij} J^j,$$

J^j 是平均 Landsberg 张量的分量 (参见文献 [8]). 由此可见, 这个方程的解不一定是 Finsler-Einstein 度量, Finsler-Einstein 度量也不一定是这个方程的解. 一个自然的问题如下.

问题 8 Finsler-Einstein 度量有什么变分背景? 是否能找到一种规范方法来构造 Finsler-Einstein 度量?

致谢 感谢审稿人的宝贵意见.

参考文献

1 Bao D, Chern S S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer-Verlag, 2000
2 Gromov M. Partial Differential Relations, EMG 3. Folge Band 9. New York: Springer, 1986
3 Shen Y B. Isometric Immersions in Minkowski Spaces. In: Frontiers in Differential Geometry, Partial Differential Equations and Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publishing, 2014, 327–344
4 Gu C H. Embeddings of Finsler spaces in Minkowski spaces (in Chinese). Acta Sin, 1956, 6: 215–232; 1958, 8: 272–275
5 Shen Z. On Finsler geometry of submanifolds. Math Ann, 1998, 311: 549–576
6 Cecil T E, Ryan P J. Tight and taut immersions of manifolds. Boston/London: Pitman Advanced Publishing Program, 1985
7 Qian C, Tang Z. Recent progress in isoparametric functions and isoparametric hypersurfaces. In: Real and Complex Submanifolds, vol. 106. Tokyo: Springer-Verlag, 2014, 65–76
8 Shen Y B, Shen Z M. Introduction to Modern Finsler Geometry. Beijing: Higher Education Press, 2013
9 He Q, Yin S T, Shen Y B. Isoparametric hypersurfaces in Minkowski spaces. ArXiv:1507.04219, 2015
10 Klingengerg W. Riemannian Geometry. Berlin/New York: Walter de Gruyter Publishers, 1982
11 Bangert V, Long Y. The existence of two closed geodesics on every Finsler 2-sphere. Math Ann, 2010, 346: 335–366
12 Wang W. On a conjecture of Anosov. Adv Math, 2012, 230: 1597–1617
13 Chern S S. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann of Math, 1944, 45: 747–752
14 Bao D, Chern S S. A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces. Ann of Math, 1996, 143: 1–20
15 Lackey B. On the Gauss-Bonnet formula in Riemann-Finsler geometry. Bull Lond Math Soc, 2002, 34: 329–340
16 Zhao W. A Gauss-Bonnet-Chern formula for Finsler vector bundles. ArXiv:1405.7772, 2014
17 Feng H, Wan X. A Gauss-Bonnet-Chern formula for almost complex Finsler manifolds. In: The 3rd International Symposium on Geometry and Topology on Submanifolds. Wuhan, 2014
18 Feng H, Liu K F, Wan X. Chern forms of holomorphic Finsler vector bundles and some applications. ArXiv:1507.01216, 2015
19 Brendle S, Schoen R. Manifolds with 1/4-pinched cuevature are space forms. J Amer Math Soc, 2009, 22: 287–307
20 Rademacher H B. Non-reversible Finsler metrics of positive flag curvature. In: A Sampler of Finsler Geometry, MSRI Series 50. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 261–302
21 Petersen P. Riemannian Geometry. Graduate Texts in Mathematics 171. New York: Springer-Verlag, 1998
22 Cheeger J, Ebin D. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1975
23 Zhao W, Shen Y B. A Cheeger type finiteness theorem for Finsler manifolds. ArXiv:1504.05015, 2015
24 Bao D, Robles C. On Ricci curvature and flag curvature in Finsler geometry. In: A Sampler of Finsler Geometry, MSRI Series 50. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, 197–259
25 Bao D, Robles C, Shen Z. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. J Differential Geom, 2004, 66: 391–449
26 Akbar-Zadeh H. Generalized Einstein manifolds. J Geom Phys, 1995, 17: 342–380

27 Chen B, Shen Y B. On a class of critical Finsler metrics. Publ Math Debrecen, 2008, 72: 451–468

Several problems in Riemann-Finsler geometry

SHEN YiBing

Abstract In differential geometry, Finsler geometry is more general than Riemannian geometry, which has been developed essentially in recent decades. In this paper, some open problems in global Finsler geometry are summarized briefly. Such problems deal with Finsler submanifolds, the curvature and topology of Finsler manifolds, and Finsler-Einstein metrics.

Keywords **Finsler manifold, isometric immersion, Finsler-Einstein metric**

MSC(2010) **53C60, 53B40**

doi: 10.1360/N012015-00214