中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1807～1828
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

带有非局部条件的 $1 < \beta \leqslant 2$ 分数阶脉冲积分 - 微分发展方程温和解的存在性和存在唯一性

献给吴从炘教授 85 华诞

刘立山[1*], 秦海勇[2,3]

1. 曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165;
2. 齐鲁师范学院数学学院, 济南 250200;
3. 山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061

E-mail: mathlls@163.com, qhymath@hotmail.com

收稿日期: 2020-06-16; 接受日期: 2020-07-23; 网络出版日期: 2020-12-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871302) 资助项目

摘要 本文研究带有非局部条件的 $1 < \beta \leqslant 2$ 分数阶脉冲积分 - 微分发展方程温和解的存在性和存在唯一性. 在预解算子非紧和紧两种情形下, 利用 (广义) Darbo 不动点定理和 Schauder 不动点定理建立了温和解的存在性结果. 同时, 利用 (广义) Banach 压缩映像原理, 给出了温和解的存在唯一性结果. 这些结果主要利用半群理论、预解算子定理、非紧性测度和不动点定理获得. 最后给出一个例子来说明主要结果的有效性.

关键词 分数阶脉冲积分 - 微分发展方程 非紧性测度 预解算子 温和解 存在性和存在唯一性

MSC (2010) 主题分类 26A33, 34A08, 34A12, 34A37, 34B10, 34K30, 47D06, 47H08, 47H10, 47J35

1 引言

近年来, 随着计算机技术和科学计算方法的发展, 分数阶微分方程理论及其应用得以迅速发展 (参见文献 [1–6]). 分数阶微积分具有记忆和遗传特征, 在理论分析和工程应用方面具有重要的价值. 非线性分析方法, 尤其是半群理论 [7–9] 和不动点定理在整数阶和分数阶微分发展方程上得到广泛应用, 成为切实有效的分析方法. 在 Banach 空间中, 文献 [10–17] 利用单调迭代方法研究了发展方程的最大和最小温和解; 文献 [18–22] 利用半群理论和非紧性测度条件或 Lipschitz 条件研究了一阶具有局部或非局部条件发展方程温和解的存在性或存在唯一性; 文献 [23–25] 利用半群理论, 在非紧性测度条件或 Lipschitz 条件下利用广义 Darbo 不动点定理 [26] 或广义压缩原理研究了一阶脉冲局部或非局部条件发展方程温和解的存在性或存在唯一性; 文献 [27–30] 利用半群理论、非紧性测度条件和广义 Darbo

英文引用格式: Liu L S, Qin H Y. Existence and uniqueness of mild solutions for fractional impulsive integro-differential evolution equations of order $1 < \beta \leqslant 2$ with nonlocal conditions (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1807–1828, doi: 10.1360/SSM-2020-0197

不动点定理研究了二阶和三阶具有局部或非局部条件发展方程温和解的存在性; 文献 [31–33] 利用半群理论和非紧性测度条件研究了 $0<\alpha\leqslant 1$ 分数阶发展方程初值问题的局部和整体解的存在性; 文献 [34–39] 利用半群理论和非紧性测度条件研究了 $0<\alpha\leqslant 1$ 分数阶带有非局部条件发展方程整体温和解的存在性; 文献 [40, 41] 利用半群理论、非紧性测度条件或 Lipschitz 条件研究了 $0<\alpha\leqslant 1$ 分数阶脉冲发展方程初值问题局部、整体温和解的存在性或存在唯一性; 文献 [42–44] 利用半群理论、非紧性测度条件或 Lipschitz 条件研究了 $1<\alpha\leqslant 2$ 分数阶具有非局部条件发展方程温和解的存在性或存在唯一性; 文献 [45–51] 利用半群理论和非紧性测度条件研究了分数阶具有非局部条件发展方程的可控性.

近些年来, 许多学者利用半群理论、非紧性测度的性质和各种不动点定理研究了整数阶和分数阶微分发展方程温和解的存在性和存在唯一性. 特别是文献 [23] 在紧性条件 (对 Hausdorff 非紧性测度) 和 Lipschitz 条件下, 利用 Darbo 不动点定理和凸幂凝聚算子不动点定理 [18], 研究了下面 Banach 空间 X 中一阶脉冲发展方程非局部问题温和解的整体存在性:

$$\begin{cases} u'(t)=Au(t)+f(t,u(t)), \quad t\in J=[0,b], \quad t\neq t_i, \\ u(0)=g(u), \\ \Delta u\,|_{t=t_i}=I_i(u(t_i)), \quad i=1,2,\dots,m, \end{cases}$$

其中 $A:D(A)\subset X\to X$ 是强连续半群 $\{T_\beta(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元, $f:J\times X\to X$ 满足 Carathéodory 条件和非紧性测度条件, $g:PC(J,X)\to X$, $I_i:X\to X$ $(i=1,2,\dots,m)$ 是连续紧的或满足 Lipschitz 条件. 文献 [24] 在线性算子 $A:D(A)\subset X\to X$ 是紧强连续半群 $\{T_\beta(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元条件下, 对非局部函数 g 分别满足: (1) 在 $PC(J,X)$ 中 Lipschitz 连续; (2) 在 $PC(J,X)$ 中连续; (3) 在 $L^1(J,X)$ 中连续等 3 种情形下也研究了以上一阶脉冲发展方程非局部问题温和解的整体存在性.

文献 [34] 利用非紧性测度、β- 预解族、k- 严格集压缩原理和 Banach 压缩定理, 研究了下列一类分数阶混合型半线性积分 - 微分发展方程非局部问题温和解的存在性和存在唯一性:

$$\begin{cases} {}_0^CD_t^\beta x(t)=A(t)(t)+f(t,x(t),(Hx)(t),(Gx)(t)), \quad t\in J, \\ x(0)+g(x)=x_0\in X, \end{cases}$$

其中 $0<\beta\leqslant 1$, 非线性积分算子 H 和 G 定义如下:

$$(Hx)(t)=\int_0^t h(t,s,x(s))ds, \quad (Gx)(t)=\int_0^T g(t,s,x(s))ds.$$

文献 [42] 研究了下列 $1<\beta<2$ 分数阶半线性积分 - 微分发展方程非局部问题温和解的存在性:

$$\begin{cases} {}_0^CD_t^\beta x(t)=Ax(t)+f(t,x(t))+\displaystyle\int_0^t q(t-s)g(s,x(s))ds, \quad t\in J:=[0,T], \\ x(0)+m(x)=x_0\in X, \quad x'(0)+n(x)=x_1\in X, \end{cases}$$

讨论了扇形算子 A 的性质, 利用 Krasnoselskii 不动点定理, 得到了温和解的存在性和唯一性定理.

最近, 文献 [43] 研究了下面不带脉冲的分数阶发展方程非局部问题温和解的局部和整体存在性:

$$\begin{cases} {}_0^CD_t^\beta x(t)=Ax(t)+f(t,x(t),(Hx)(t),(Gx)(t)), \quad t\in J, \\ x(0)+g_1(x)=x_1\in X, \quad x'(0)+g_2(x)=x_2\in X, \end{cases}$$

其中 $1<\beta\leqslant 2$, 两个线性 Voltrra 型积分算子 H 和 G 定义如下:

$$(Hx)(t)=\int_0^t h(t,s)x(s)ds, \quad (Gx)(t)=\int_0^t g(t,s)x(s)ds.$$

尽管分数阶脉冲发展方程温和解的定义还存在某些不合适的问题 (参见文献 [52–55]), 但经过修正温和解的定义, 利用非线性分析方法, 尤其是利用非紧性测度和不动点定理方法在分数阶微分发展方程温和解的存在性、唯一性和可控性方面进行了广泛的研究. 分数阶发展方程温和解的问题, 还有许多方面值得研究. 在分数阶脉冲发展方程具有非局部条件的问题中, 温和解的定义、存在性、唯一性和可控性问题的研究, 具有重要的理论和应用价值. 研究非局部 Cauchy 问题的强烈动机来自物理学, 例如, 分数扩散方程是抽象的偏微分方程, 涉及空间和时间变元的分数导数, 它们有助于模拟异常扩散, 其中粒子的扩散方式不同于经典扩散方程预测 (参见文献 [39]). 非局部条件比经典的初始条件 $x(0)=x_0$ 在应用物理中具有更好的效果. 例如, $g(x)$ 可以取作

$$g(x)=\sum_{i=1}^m c_i x(s_i),$$

其中 c_i $(i=1,2,\ldots,m)$ 是给定的常数, 并且 $0<s_1<s_2<\cdots<s_m\leqslant T$. 非局部条件最初由 Byszewski [21] 提出, 他证明了非局部 Cauchy 问题经典解和温和解的存在性和唯一性. 正如 Byszewski 和 Lakshmikantham [22] 所说, 描述一些物理现象非局部条件可以比标准初始条件更有用.

受以上文献启发, 本文在 Banach 空间 X 中考虑如下非常一般的带有非局部条件的 $1<\beta\leqslant 2$ 分数阶脉冲积分 - 微分发展方程:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\beta x(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(\tau(t)),(Hx)(t),(Gx)(t)), \quad t\in J:=[0,T], \quad t\neq t_k,\\ \Delta x\,|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)),\\ \Delta x'\,|_{t=t_k}=\hat{I}_k(x(t_k)), \quad k=1,2,\ldots,m,\\ x(0)+g_1(x)=x_0\in X, \quad x'(0)+g_2(x)=x_1\in X, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ${}_0^C D_t^\beta$ 是 Caputo 分数阶导数, $1<\beta\leqslant 2$, $(X,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间, 状态变量 $x(\cdot)\in X$, $A:D(A)\subset X\to X$ 是预解算子 $\{C_\beta(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元, $f:J\times X\times X\times X\times X\to X$ 是连续的, $\tau:J\to J$ 连续, 且 $0\leqslant\tau(t)\leqslant t$, $t\in J$. 非线性积分算子 H 和 G 定义如下:

$$(Hx)(t)=\int_0^t h(t,s,x(s))ds, \quad (Gx)(t)=\int_0^T g(t,s,x(s))ds, \tag{1.2}$$

其中 $h:\Delta_1\times X\to X$ 和 $g:\Delta_2\times X\to X$ 是连续的, 这里 $\Delta_1:=\{(t,s)\mid 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$, $\Delta_2:=\{(t,s)\mid 0\leqslant t,s\leqslant T\}$. $I_k:X\to X$ 和 $\hat{I}_k:X\to X$ 是脉冲项且是连续的. $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$, $x(t_k^-)=\lim_{t\to 0^-}x(t_k+h)$ 表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的左极限, 并且 $x(t_k)=x(t_k^-)$.

本文余下内容的主要结构如下. 第 2 节给出主要的定义、引理和性质, 这些结论将应用于主要结果的证明. 第 3 节在预解算子紧和非紧的情形下, 利用非紧性测度方法、预解算子定理和 (广义) Darbo 不动点定理得到带有非局部条件的 $1<\beta\leqslant 2$ 分数阶脉冲积分 - 微分发展方程 (1.1)–(1.2) 整体温和解的存在性, 在 Lipschitz 条件下发展方程 (1.1)–(1.2) 整体温和解的存在性和唯一性结果. 第 4 节给出一个例子说明主要结果的有效性.

2 预备知识和引理

本节给出一些定义、符号和引理.

定义 2.1 [2,5] 函数 $x(t)$ 的 $\beta>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分定义为

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{-\beta}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(s)}{(t-s)^{1-\beta}}ds. \tag{2.1}$$

定义 2.2 [2,5] 函数 $x(t)$ 的 $\beta>0$ 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\beta}x(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_{t_0}^{t}\frac{x^{(m)}(s)}{(t-s)^{1+\beta-m}}ds, \tag{2.2}$$

其中 $m=[\beta]+1$ 为整数, $[\beta]$ 表示 β 的整数部分.

性质 2.1 [4] β 阶 Caputo 导数的 Laplace 变换为

$$\mathcal{L}({}_0^CD_t^{\beta}x(t))(s)=s^{\beta}(\mathcal{L}x)(s)-\sum_{j=1}^{n-1}s^{\beta-j-1}x^{(j)}(0),\quad n-1<\beta\leqslant n. \tag{2.3}$$

本文假设 $(X,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间, $J=[0,T]$, $0<T<\infty$, $C(J,X)$ 是定义在 J 上的 X- 值连续函数空间, 范数为 $\|x\|_C=\max\{\|x(t)\|,t\in[0,T]\}$. 对 $p\geqslant 1$, $L^p(J,X)$ 是定义在 J 上的 X- 值 Bochner 可积函数空间, 范数为 $\|x\|_p=(\int_0^T\|x(s)\|^pds)^{1/p}$; $PC[J,X]=\{x\mid x:J\to X$ 在 $t\neq t_k$ 处连续, 在 $t=t_k$ 处左连续, 且 $x(t_k^+)$ 存在, $k=1,2,\ldots,m\}$, 范数为 $\|x\|_{PC}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|$.

对任意的 $S\subset PC(J,X)$, 记 $S(t)=\{x(t):x\in S\}$, $t\in J$. 对于任意的 $R>0$, 记 $B_R=\{x\in X:\|x\|\leqslant R\}$, $T_R=\{x\in PC(J,X):\|x\|_{PC}\leqslant R\}$, $J_0=[0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2],\ldots,J_m=(t_m,T]$. 令 $\bar{J}_k=[t_k,t_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,m)$.

定义 2.3 [56,57] 设 X 是实 Banach 空间, 对 X 上的任何有界集合 Y 上的 Kuratowski 非紧性测度定义为

$$\alpha(Y)=\inf\Big\{\varepsilon>0:Y=\bigcup_{i=1}^{m}E_i,\mathrm{diam}(E_i)\leqslant\varepsilon,i=1,\ldots,m\Big\}.$$

若 $U,V\subset X$ 为两个有界集, 则下列结论成立:

(1) 若 $V\subset U$, 则 $\alpha(U)\leqslant\alpha(V)$;

(2) $\alpha(U)=\alpha(\overline{U})=\alpha(\mathrm{Conv}\,U)$, 其中 $\alpha(\bar{(U)})$ 和 $\mathrm{Conv}\,U$ 分别表示 U 的闭包和凸包;

(3) U 是相对紧的当且仅当 $\alpha(U)=0$;

(4) $\alpha(\lambda U)=|\lambda|\alpha(U)$, λ 是实数;

(5) 若 $v\in X$, 则 $\alpha(U+v)=\alpha(U)$;

(6) $\alpha(U+V)\leqslant\alpha(U)+\alpha(V)$, 其中 $U+V=\{x+y:x\in U,y\in V\}$;

(7) $\alpha(U\cup V)=\max\{\alpha(U),\alpha(V)\}$.

注 2.1 $\alpha_{PC}(S)$ 表示空间 $PC(J,X)$ 中有界集 S 的 Kuratowski 非紧性测度.

引理 2.1 [46,58] 若 $S\subset PC[J,X]$ 在 J_k $(k=0,1,\ldots,m)$ 上是有界且等度连续的, 则 $\overline{Co}S\subset PC(J,X)$ 在 J_k $(k=0,1,\ldots,m)$ 上也是有界且等度连续的.

引理 2.2 [56, 57]　假设 $S\subset PC[J,X]$ 是有界且在 J_k $(k=0,1,\ldots,m)$ 上等度连续的, 那么 $m(t)=\alpha(S(t))$ 在 J_k 上是连续的, 并且

$$\alpha\left(\int_J S(s)ds\right)\leqslant\int_J\alpha(S(s))ds, \tag{2.4}$$

其中 α 是有界集在 X 上的 Kuratowski 非紧性测度.

引理 2.3 [59]　假设 $f:J\times B_R\times B_R\times B_R\times B_R\to X$ 是有界且一致连续的, $S\subset PC[J,X]$ 在 J_i $(i=0,1,\ldots,m)$ 上是有界且等度连续的, 那么 $\{f(t,x(t),x(\tau(t)),(Hx)(t),(Gx)(t)):x\in S\}\subset PC[J,X]$ 在 J_i $(i=0,1,\ldots,m)$ 上是有界且等度连续的.

引理 2.4 [58]　假设 $S\subset PC(J,X)$ 在 J_k 上是有界且等度连续的, 那么

$$\alpha_{PC}(S)=\sup_{t\in J}\alpha(S(t)). \tag{2.5}$$

引理 2.5 [58]　假设 $S\subset PC(J,X)$ 是有界的, 那么

$$\alpha(S(J))\leqslant\alpha_{PC}(S). \tag{2.6}$$

引理 2.6 [58]　若 $S\subset PC(J,X)$ 在 $PC(J,X)$ 上是相对紧的, 当且仅当 S 在 $C(J_k,X)$ $(k=0,1,\ldots,m)$ 上是相对紧的.

引理 2.7 [26]　假设 E 是实 Banach 空间, 算子 $F:E\to E$ 连续且有界, 对任意有界子集 $D\subset E$, 设

$$\tilde{F}^1(D)=F(D),\quad \tilde{F}^n(D)=F(\overline{\mathrm{Conv}}\tilde{F}^{n-1}(D)),\quad n=2,3,\ldots \tag{2.7}$$

假设存在常数 $0\leqslant k<1$ 及一个正整数 n_0 满足, 对于任意的有界子集 $D\subset E$, 有

$$\alpha(\tilde{F}^{n_0}(D))\leqslant k\alpha(D), \tag{2.8}$$

则 F 在 E 中有一个不动点.

注 2.2　引理 2.7 (参见文献 [26, 引理 2.4]) 是著名 Darbo 不动点定理的推广, 称它为广义的 Darbo 不动点定理. 许多作者利用它来研究微分方程和积分方程解的存在性, 如文献 [27–29, 34, 43, 60, 61].

引理 2.8 [26, 62]　假设常数 $0<b<1$ 和 $h>0$. 令

$$S_n=b^n+C_n^1b^{n-1}h+\frac{C_n^2b^{n-2}h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.9}$$

其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, 则 $S_n=o(\frac{1}{n^s})$ $(n\to+\infty)$, 其中 $s>1$ 是任意的实数.

定义 2.4 [43]　令 $\beta\in(1,2]$. $\{C_\beta(t)\}_{t\geqslant0}\subset L(X)$ 称为方程

$${}_0^CD_t^\beta x(t)=Ax(t),\quad x(0)=\eta,\quad x'(0)=0 \tag{2.10}$$

的预解算子 (或者强连续 β 阶分数阶余弦族), 如果满足以下条件:

(i) $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 是强连续, 并且 $\{C_\beta(0)\}=I$;

(ii) $C_\beta(t)D(A)\subset D(A)$, 对于任意的 $\eta\in D(A)$, $t\geqslant0$, $AC_\beta(t)\eta=C_\beta(t)A\eta$;

(iii) $C_\beta(t)\eta$ 是 $x(t)=\eta+\int_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}Ax(s)ds$ $(\eta\in D(A),\ t\geqslant0)$ 的解, 其中 $A:D(A)\subset X\to X$ 是闭且密集定义的算子, 即是 $C_\beta(t)$ 的无穷小生成元.

性质 2.2 [43] 预解算子 $C_\beta(t)$ 是指数有界的, 记为 $A\in C_\beta(M,\omega)$, 如果存在常数 $M\geqslant 1$ 和 $\omega\geqslant 0$ 满足

$$\|C_\beta(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t},\quad t\geqslant 0. \tag{2.11}$$

性质 2.3 [43] 预解算子 $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 是紧的, 当且仅当 $(\lambda^\beta-A)^{-1}$ 是紧的, $\lambda\in\rho(A)$.

性质 2.4 [43] 若 $C_\beta(t)$ $(1<\beta\leqslant 2)$ 是强连续 β 阶分数阶余弦族, 且是指数有界的, 即 $A\in C_\beta(M,\omega)$, 则分数阶正弦族 $S_\beta:[0,+\infty)\to L(X)$ 为

$$S_\beta(t)=\int_0^t C_\beta(s)ds,\quad t\geqslant 0, \tag{2.12}$$

分数阶 Riemann-Liouville 族 $P_\beta:[0,+\infty)\to L(X)$ 为

$$P_\beta(t)={}_0^{RL}D_t^{1-\beta}C_\beta(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\beta-2}C_\beta(s)ds,\quad t\geqslant 0, \tag{2.13}$$

且有下列性质:

(i) $\{S_\beta(t)\}_{t>0}$ 和 $\{P_\beta(t)\}_{t>0}$ 是强连续的;

(ii) 若 $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 是紧的, 则 $\{S_\beta(t)\}_{t>0}$ 和 $\{P_\beta(t)\}_{t>0}$ 也是紧的;

(iii) 存在 $M^*>0$, 使得 $\|C_\beta(t)\|\leqslant M^*$, $t=[0,T]$, 且可得

$$\|S_\beta(t)\|\leqslant\int_0^t\|C_\beta(s)\|ds\leqslant M^*t\leqslant M^*T,\quad t\in[0,T], \tag{2.14}$$

$$\|P_\beta(t)\|\leqslant\frac{M^*}{\Gamma(\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\beta-2}ds=\frac{M^*}{\Gamma(\beta)}t^{\beta-1}\leqslant\frac{M^*}{\Gamma(\beta)}T^{\beta-1},\quad t\in[0,T]. \tag{2.15}$$

性质 2.5 假设 $A\in C^\beta(M,\omega)$, $C_\beta(t)$ 是预解算子, 称 $x\in PC[J,X]$ 是方程 (1.1)–(1.2) 的温和解, 如果 x 满足下面的积分方程:

$$\begin{aligned}x(t)=&C_\beta(t)[x_0-g_1(x)]+S_\beta(t)[x_1-g_2(x)]\\&+\int_0^t P_\beta(t-s)f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\\&+\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(x(t_k))+\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(x(t_k)),\quad t\in J.\end{aligned} \tag{2.16}$$

3 主要结果

本文需要以下假设条件.

(H_1) 存在常数 $M^*>0$, 使得对任意的 $t\geqslant 0$, 有 $\|C_\beta(t)\|\leqslant M^*$.

(H_2) 积分算子 $H:\Delta_1\times X\to X$ 连续, $G:\Delta_2\times X\to X$ 连续, 且存在 $h_1(t,\cdot)$, $g_1(t,\cdot)\in L(J,\mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$, 使得 $h_0=\max_{t\in[0,T]}\int_0^t h_1(t,s)ds<+\infty$, $g_0=\max_{t\in[0,T]}\int_0^T g_1(t,s)ds<+\infty$,

$$\|h(t,s,x)\|\leqslant h_1(t,s)\|x\|+e_h,\quad (t,s)\in\Delta_1,\quad x\in X, \tag{3.1}$$

$$\|g(t,s,x)\|\leqslant g_1(t,s)\|x\|+e_g,\quad (t,s)\in\Delta_2,\quad x\in X. \tag{3.2}$$

(H_3) I_k, $\hat{I}_k: X \to X$ 连续, 且存在常数 $d_{I_k} > 0$, $d_{\hat{I}_k} > 0$, $e_{I_k} > 0$, $e_{\hat{I}_k} > 0$, 满足

$$\|I_k(x)\| \leqslant d_{I_k}\|x\| + e_{I_k}, \quad x \in X, \tag{3.3}$$

$$\|\hat{I}_k(x)\| \leqslant d_{\hat{I}_k}\|x\| + e_{\hat{I}_k}, \quad x \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.4}$$

(H_4) $g_i: PC(J, X) \to X$ 连续, 且存在常数 $d_i > 0$ 和 $c_i > 0$, 使得 $\forall x \in PC[J, X]$, 满足

$$\|g_i(x)\| \leqslant d_i\|x\|_{PC} + e_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

(H_5) 非线性项 $f: J \times B_R \times B_R \times B_R \times B_R \to X$ 是有界一致连续的,

$$\gamma = \limsup_{\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_4\| \to +\infty} \left(\sup_{t \in J} \frac{\|f(t, x_1, x_2, x_3, x_4)\|}{\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \|x_4\|}\right) < +\infty, \tag{3.6}$$

且

$$K = M^*\left[d_1 + Td_2 + \frac{\gamma T^\beta}{\Gamma(\beta)}(2 + h_0 + g_0) + \sum_{k=1}^{m}(d_{I_k} + Td_{\hat{I}_k})\right] < 1. \tag{3.7}$$

(H_6) 存在非负的 Lebesgue 可积函数 $L_i \in L(J, \mathbb{R}^+)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, 使得对于任意的有界集 $S_i \subset X$, $t \in J$, 满足

$$\alpha(f(t, S_1, S_2, S_3, S_4)) \leqslant \sum_{i=1}^{4} L_i(t)\alpha(S_i). \tag{3.8}$$

(H_7) 存在常数 $L_{I_k}, L_{\hat{I}_k} > 0$, 对任意的有界集 $S \subset X$, 满足

$$\alpha(I_k(S)) \leqslant L_{I_k}\alpha(S), \quad \alpha(\hat{I}_k(S)) \leqslant L_{\hat{I}_k}\alpha(S). \tag{3.9}$$

(H_8) 存在常数 $L_h > 0$, $L_g > 0$, 使得对任意的有界集 $S \subset X$, 满足

$$\alpha(h(t, s, S)) \leqslant L_h\alpha(S), \quad \alpha(g(t, s, S)) \leqslant L_g\alpha(S). \tag{3.10}$$

(H_9) 存在常数 $L_{g_i} > 0$ $(i = 1, 2)$, 使得对任意的有界集 $S^* \subset PC(J, X)$, 满足

$$\alpha(g_i(S^*)) \leqslant L_{g_i}\alpha_{PC}(S^*), \quad i = 1, 2. \tag{3.11}$$

3.1　预解算子非紧在非紧性测度条件下温和解的存在性

定理 3.1　若条件 (H_1)–(H_8) 成立, $g_i: PC(J, X) \to X$ 是紧的 $(i = 1, 2)$, (H_6) 中的 $L_4(t) \equiv 0$, $t \in J$, 且

$$a \equiv M^*\sum_{k=1}^{m}(L_{I_k} + TL_{\hat{I}_k}) < 1, \tag{3.12}$$

则方程 (1.1)–(1.2) 在 $PC[J, X]$ 中至少存在一个整体温和解.

证明 首先定义算子 $F: PC[J,X]\to PC[J,X]$ 如下:

$$\begin{aligned}(Fx)(t)=&\,C_\beta(t)[x_0-g_1(x)]+S_\beta(t)[x_1-g_2(x)]\\&+\int_0^t P_\beta(t-s)f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\\&+\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(x(t_k))+\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(x(t_k)),\quad t\in J.\end{aligned}\tag{3.13}$$

由 $f: J\times B_R\times B_R\times B_R\times B_R\to X$ 是有界且一致连续的, 且 g_1、g_2、I_k 和 $\hat{I}_k$ 是连续的, 易证 F 在 T_R 上是连续有界算子.

由条件 (H_5), 必然存在 $\gamma'>\gamma$ 满足

$$K'=M^*\left[d_1+Td_2+\frac{\gamma' T^\beta}{\Gamma(\beta)}(2+h_0+g_0)+\sum_{k=1}^m(d_{I_k}+Td_{\hat{I}_k})\right]<1.\tag{3.14}$$

由 (3.6) 可知, 存在 $r_0>0$ 满足

$$\|f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\|<\gamma'(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_4\|),\quad t\in J,\quad \|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_4\|>r_0.\tag{3.15}$$

令

$$M=\sup_{t\in J,\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_4\|\leqslant r_0}\|f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\|<+\infty,\tag{3.16}$$

则有

$$\|f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\|\leqslant\gamma'(\|x_1\|+\|x_2\|+\|x_3\|+\|x_4\|)+M,\quad t\in J,\quad x_1,x_2,x_3,x_4\in X.\tag{3.17}$$

对于任意的 $x\in T_R=\{x\in PC(J,X):\|x\|_{PC}\leqslant R\}$, $t\in J$, 有

$$\|x(\tau(t))\|\leqslant\|x\|_{PC}\leqslant R,\tag{3.18}$$

且由 (1.2) 和条件 (H_2), 同时有

$$\begin{aligned}\|(Hx)(t)\|&\leqslant\int_0^t\|h(t,s,x(s))\|ds\\&\leqslant\int_0^t(h_1(t,s)\|x(s)\|+e_h)ds\\&\leqslant\int_0^t(h_1(t,s)\|x\|_{PC}+e_h)ds\\&\leqslant h_0R+e_hT,\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\|(Gx)(t)\|&\leqslant\int_0^T\|g(t,s,x(s))\|ds\\&\leqslant\int_0^T(g_1(t,s)\|x(s)\|+e_g)ds\\&\leqslant\int_0^T(g_1(t,s)\|x\|_{PC}+e_g)ds\end{aligned}$$

$$\leqslant g_0R+e_gT. \tag{3.20}$$

从而由 (3.17)–(3.20) 可知, 对于任意的 $t\in J$, 有

$$\begin{aligned}\|f(t,x(t),x(\tau),(Hx)(t),(Gx)(t))\| &\leqslant \gamma'(\|x(t)\|+\|x(\tau(t))\|+\|(Hx)(t)\|+\|(Gx)(t)\|)+M\\ &\leqslant \gamma'(2R+h_0R+e_hT+g_0R+e_gT)+M\\ &=\gamma'(2+h_0+g_0)R+\gamma'(e_hT+e_gT)+M. \end{aligned}\tag{3.21}$$

故由算子的定义 (3.13)、(3.21) 和条件 (H_1)–(H_4) 可知, 对任意的 $x\in T_R$, 有

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\| \leqslant\ & M^*(\|x_0\|+\|g_1(x)\|)+M^*T(\|x_1\|+\|g_2(x)\|)\\ &+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t[\gamma'(\|x(s)\|+\|x(\tau(s))\|+\|(Hx)(s)\|+\|(Gx)(s)\|)+M]ds\\ &+\sum_{k=1}^m M^*\|I_k(x_{t_k}^-)\|+\sum_{k=1}^m M^*T\|\hat{I}_k(x_{t_k}^-)\|\\ \leqslant\ & M^*(\|x_0\|+e_1+T\|x_1\|+Te_2)+(M^*d_1+M^*Td_2)R\\ &+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t[\gamma'(2R+h_0R+g_0R+e_hT+e_gT)+M]ds\\ &+M^*\sum_{k=1}^m(d_{I_k}R+e_{I_k}+Td_{\hat{I}_k}R+Te_{\hat{I}_k})\\ \leqslant\ & M^*(\|x_0\|+e_1+T\|x_1\|+Te_2)+\frac{M^*T^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)}(e_g+e_h)\\ &+\frac{MM^*T^{\beta}}{\Gamma(\beta)}+M^*\sum_{k=1}^m(e_{I_k}+Te_{\hat{I}_k})\\ &+M^*\left[d_1+Td_2+\frac{T^\beta}{\Gamma(\beta)}\gamma'(2+h_0+g_0)+\sum_{k=1}^m(d_{I_k}+Td_{\hat{I}_k})\right]R\\ \leqslant\ & C+K'R, \end{aligned}\tag{3.22}$$

其中 $C>0$ 为常数. 由 (3.14) 和 (3.22), 只要取

$$\begin{aligned}R^*>&\left(1-M^*d_1-M^*Td_2-\frac{M^*T^\beta}{\Gamma(\beta)}\gamma'(2+h_0+g_0)-M^*\sum_{k=1}^m(d_{I_k}+Td_{\hat{I}_k})\right)^{-1}\\ &\times\left(M^*(\|x_0\|+e_1+T\|x_1\|+Te_2)+\frac{M^*T^{\beta+1}}{\Gamma(\beta)}(e_g+e_h)\right.\\ &\left.+\frac{MM^*T^\beta}{\Gamma(\beta)}+M^*\sum_{k=1}^m(e_{I_k}+Te_{\hat{I}_k})\right), \end{aligned}\tag{3.23}$$

则有 $\|Fx\|_{PC}\leqslant R^*$, 即 $F:T_{R^*}\to T_{R^*}$ 是连续有界算子.

下面证明算子 $F:T_{R^*}\to T_{R^*}$ 在 J_k $(k=0,1,2,\ldots,m)$ 上等度连续. 对于任意的 $x\in T_{R^*}$, t_1, $t_2\in J_k$ (不妨假设 $t_1\leqslant t_2$), 有

$$\|(Fx)(t_2)-(Fx)(t_1)\|\leqslant\|C_\beta(t_2)-C_\beta(t_1)\|\|x_0-g_1(x)\|+\|S_\beta(t_2)-S_\beta(t_1)\|\|x_1-g_2(x)\|$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\|\int_{t_1}^{t_2} P_\beta(t_2-s)f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\right\| \\
&+\left\|\int_0^{t_1}[P_\beta(t_2-s)-P_\beta(t_1-s)]f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\right\| \\
&+\sum_{0\leqslant t<t_1}\|C_\beta(t_2-t_k)-C_\beta(t_1-t_k)\|\|I_k(x(t_k))\| \\
&+\sum_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|C_\beta(t_2-t_k)-C_\beta(t_1-t_k)\|\|I_k(x(t_k))\| \\
&+\sum_{0\leqslant t<t_1}\|S_\beta(t_2-t_k)-S_\beta(t_1-t_k)\|\|\hat{I}_k(x(t_k))\| \\
&+\sum_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|S_\beta(t_2-t_k)-S_\beta(t_1-t_k)\|\|\hat{I}_k(x(t_k))\| \\
\leqslant{}&\|C_\beta(t_2)-C_\beta(t_1)\|(\|x_0\|+d_1R^*+e_1)+\|S_\beta(t_2)-S_\beta(t_1)\|(\|x_1\|+d_2R^*+e_2) \\
&+\frac{\gamma' M^*T^\beta}{\Gamma(\beta)}[(2+h_0+g_0)R^*+(e_hT+e_gT)]|t_2-t_1| \\
&+\sum_{k=1}^m\|C_\beta(t_2-t_k)-C_\beta(t_1-t_k)\|(d_{I_k}R^*+e_{I_k}) \\
&+\sum_{k=1}^m\|C_\beta(t_2-t_k)-C_\beta(t_1-t_k)\|(d_{I_k}R^*+e_{I_k}) \\
&+\sum_{k=1}^m\|S_\beta(t_2-t_k)-S_\beta(t_1-t_k)\|(d_{\hat{I}_k}R^*+e_{\hat{I}_k}) \\
&+\sum_{k=1}^m\|S_\beta(t_2-t_k)-S_\beta(t_1-t_k)\|(d_{\hat{I}_k}R^*+e_{\hat{I}_k}).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

由性质 2.4 以及 $C_\beta(t)$、$S_\beta(t)$ 和 $P_\beta(t)$ 的强连续性可知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对于任意的 $x\in T_{R^*}$, $t_2,t_1\in J_k$, 当 $0\leqslant t_2-t_1<\delta$ 时, 有

$$\|(Fx)(t_2)-(Fx)(t_1)\|<\varepsilon, \tag{3.25}$$

故 $(Fx)(T_{R^*})$ 在 J_k 上等度连续.

由引理 2.1 知, $\overline{Co}F(T_{R^*})\subset T_{R^*}$ 在 J_k 上有界且等度连续的, 则 $F:\overline{Co}F(T_{R^*})\to\overline{Co}F(T_{R^*})$ 是有界连续算子. 对于任意的 $S^*\subset\overline{Co}F(B_{R^*})$, 由引理 2.1 和 2.3, 可得 $\tilde{F}^n(S^*)$ $(n=1,2,\ldots)$ 是有界且等度连续的. 从而由引理 2.4 可知,

$$\alpha_{PC}(\tilde{F}^n(S^*))=\sup_{t\in J}\alpha((\tilde{F}^n(S^*))(t)),\quad n=1,2,\ldots \tag{3.26}$$

下面证明存在常数 $0<k<1$ 及正整数 $n_0\in\mathbb{N}$, 满足对于任意的 $S^*\subset\overline{Co}F(T_{R^*})$, 有

$$\alpha_{PC}(\tilde{F}^{n_0}(S^*))\leqslant k\alpha_{PC}(S^*). \tag{3.27}$$

由 $g_i:PC(J,X)\to X$ 是紧的 $(i=1,2)$ 和条件 (H_6)–(H_8), 可得

$$\alpha((F(S^*))(t))\leqslant\alpha\bigg(\int_0^t P_\beta(t-s)f(s,S^*(s),S^*(\tau(s)),(HS^*)(s),(GS^*)(s))ds\bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(S^*(t_k))\bigg)+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(S^*(t_k))\bigg)\\
&\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t[L_1(s)\alpha(S^*(s))+L_2(s)\alpha(S^*(\tau(s)))+L_3(s)\alpha((HS^*)(s))]ds\\
&+M^*\bigg(\sum_{0<t_k<t}L_{I_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)+M^*T\bigg(\sum_{0<t_k<t}L_{\hat{I}_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)\\
&\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t[L_1(s)+L_2(s)+TL_hL_3(s)]\alpha(S^*(s))ds\\
&+M^*\bigg(\sum_{k=1}^mL_{I_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)+M^*T\bigg(\sum_{k=1}^mL_{\hat{I}_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)\\
&\leqslant\int_0^tL(s)ds\alpha_{PC}(S^*)+a\alpha_{PC}(S^*),\quad t\in J,
\end{aligned}\tag{3.28}
$$

其中函数 $L(t)=\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}[L_1(t)+L_2(t)+TL_hL_3(t)]$, 显然, $L\in L^1(J,\mathbb{R}^+)$. 由 $a<1$ (参见 (3.12)) 可知, 存在 $0<\varepsilon_0<1$, 使得 $0<b\equiv\varepsilon_0+a<1$, 从而存在一个连续函数 $\varphi:J\to\mathbb{R}^1$ 满足

$$
\int_0^T|L(s)-\varphi(s)|ds<\varepsilon_0.\tag{3.29}
$$

故由 (3.28) 和 (3.29) 可知,

$$
\begin{aligned}
\alpha((\tilde{F}^1(S^*))(t))&\leqslant\bigg[\int_0^t|L(s)-\varphi(s)|\alpha(S^*(s))ds+\int_0^t|\varphi(s)|\alpha(S^*(s))ds\bigg]\\
&+M^*\bigg(\sum_{k=1}^m(L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})\alpha(S^*(t_k))\bigg)\\
&\leqslant\varepsilon_0\alpha_{PC}(S^*)+\Psi t\alpha_{PC}(S^*)+a\alpha_{PC}(S^*)\\
&\leqslant(b+\Psi t)\alpha_{PC}(S^*),
\end{aligned}\tag{3.30}
$$

其中 $\Psi=\max\{|\varphi(t)|:t\in J\}$.

假设对于自然数 $j\in\mathbb{N}$ 有

$$
\alpha((\tilde{F}^j(S^*))(t))\leqslant\bigg[b^j+C_j^1b^{j-1}(\Psi t)+\frac{C_j^2b^{j-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\Psi t)^j}{j!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*),\quad t\in J,\tag{3.31}
$$

则由算子 F 的定义 (3.13)、$g_i:PC(J,X)\to X$ 是紧的 $(i=1,2)$ 和条件 (H_6)–(H_8), 类似 (3.30) 可知,

$$
\begin{aligned}
\alpha((\tilde{F}^{j+1}(S^*))(t))&\leqslant\alpha(C_\beta(t)(x_0-g_1(\tilde{F}^j(S^*)))+S_\beta(t)(x_1-g_2(\tilde{F}^j(S^*))))\\
&+\alpha\bigg(\int_0^tP_\beta(t-s)f(s,(\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*))(s),(\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*))(\tau(s)),\\
&(H(\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*)))(s),(G(\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*)))(s))ds\bigg)\\
&+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k((\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*))(t_k))\bigg)\\
&+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k((\overline{Co}\tilde{F}^j(S^*))(t_k))\bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t [L_1(s)+L_2(s)+TL_hL_3(s)]\alpha(\tilde{F}^j(S^*)(s))ds\\
&\quad + M^*\bigg(\sum_{0<t_k<t} L_{I_k}\alpha(\tilde{F}^j(S^*)(t_k))\bigg) + M^*T\bigg(\sum_{0<t_k<t} L_{\hat{I}_k}\alpha(\tilde{F}^j(S^*)(t_k))\bigg)\\
&\leqslant \bigg[\int_0^t |L(s)-\varphi(s)|\alpha(\tilde{F}^j(S^*)(s))ds + \int_0^t |\varphi(s)|\alpha(\tilde{F}^j(S^*)(s))ds\bigg]\\
&\quad + a\bigg[b^j + C_j^1 b^{j-1}(\Psi t) + \frac{C_j^2 b^{j-2}(\Psi t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\Psi t)^j}{j!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*)\\
&\leqslant \varepsilon_0\bigg[b^j + C_j^1 b^{j-1}(\Psi t) + \cdots + \frac{(\Psi t)^j}{j!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*)\\
&\quad + \Psi\int_0^t \bigg[b^j + C_j^1 b^{j-1}(\Psi s) + \cdots + \frac{(\Psi s)^j}{j!}\bigg]ds\alpha_{PC}(S^*)\\
&\quad + a\bigg[b^j + C_j^1 b^{j-1}(\Psi t) + \cdots + \frac{(\Psi t)^j}{j!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*)\\
&\leqslant b\bigg[b^j + C_j^1 b^{j-1}(\Psi t) + \cdots + \frac{(\Psi t)^j}{j!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*)\\
&\quad + \bigg[C_j^0 b^j \frac{(\Psi t)^1}{1!} + C_j^1 b^{j-1}\frac{(\Psi t)^2}{2!} + \cdots + C_j^j \frac{(\Psi s)^{j+1}}{(j+1)!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*)\\
&\leqslant \bigg[C_{j+1}^0 b^{j+1} + C_{j+1}^1 b^j(\Psi t) + \frac{C_{j+1}^2 b^{j-1}(\Psi t)^2}{2!}\\
&\quad + \cdots + C_{j+1}^{j+1}\frac{(\Psi t)^{j+1}}{(j+1)!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*),\quad t\in J.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

因此, 由数学归纳法可知, 对于任意自然数 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\in J$, 都有

$$
\alpha((\tilde{F}^n(S^*))(t)) \leqslant \bigg[C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1}(\Psi t) + \frac{C_n^2 b^{n-2}(\Psi t)^2}{2!} + \cdots + C_n^n \frac{(\Psi t)^n}{n!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*), \tag{3.33}
$$

故由 (3.26) 可知, 对于任意自然数 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$
\alpha_{PC}(\tilde{F}^n(S^*)) \leqslant \bigg[b^n + C_n^1 b^{n-1}(\Psi T) + \frac{C_n^2 b^{n-2}(\Psi T)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\Psi T)^n}{n!}\bigg]\alpha_{PC}(S^*), \tag{3.34}
$$

从而由引理 2.8 知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$
\alpha_{PC}(\tilde{F}^n(S^*)) = o\bigg(\frac{1}{n^s}\bigg)\alpha_{PC}(S^*). \tag{3.35}
$$

因此, 存在 $0\leqslant k<1$ 和自然数 $n_0\in\mathbb{N}$ 满足 (2.8), 由引理 2.7 知, 算子 F 在 $\overline{Co}F(T_R^*)$ 上至少有一个不动点, 即问题 (1.1)–(1.2) 在 $\overline{Co}F(T_R^*)\subset PC[J,X]$ 上至少有一个整体温和解. 证毕. □

定理 3.2 若条件 (H_1)–(H_9) 成立, 且

$$
\begin{aligned}
k &= M^*\bigg(L_{g_1} + TL_{g_1} + \frac{T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T [L_1(s)+L_2(s)+TL_hL_3(s)+TL_gL_4(s)]ds + \sum_{k=1}^m (L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})\bigg)\\
&< 1.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

则方程 (1.1)–(1.2) 在 $PC(J,X)$ 中至少存在一个整体温和解.

证明 由定理 3.1 的证明易知, $F:\overline{Co}F(T_{R^*})\to\overline{Co}F(T_{R^*})$ 是有界连续算子, 并且 $\overline{Co}F(T_{R^*})\subset T_{R^*}$ 在每个 J_k 上有界且等度连续, 从而由算子 F 的定义 (3.13)、条件 (H_1)–(H_9) 和非紧性测度的性质可知, 对任意有界集 $S^*\subset\overline{Co}F(T_{R^*})\subset T_{R^*}$, 有

$$\begin{aligned}\alpha((F(S^*))(t))&\leqslant M^*\alpha(g_1(S^*))+TM^*\alpha(g_2(S^*))\\&\quad+\alpha\bigg(\int_0^t P_\beta(t-s)f(s,S^*(s),S^*(\tau(s)),(HS^*)(s),(GS^*)(s))ds\bigg)\\&\quad+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(S^*(t_k))\bigg)\\&\quad+\alpha\bigg(\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(S^*(t_k))\bigg)\\&\leqslant M^*(L_{g_1}+TL_{g_1})\alpha_{PC}(S^*)\\&\quad+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T[L_1(s)\alpha(S^*(s))+L_2(s)\alpha(S^*(\tau(s)))\\&\quad+L_3(s)\alpha((HS^*)(s))+L_4(s)\alpha((GS^*)(s))]ds\\&\quad+M^*\bigg(\sum_{0<t_k<t}L_{I_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)+M^*T\bigg(\sum_{0<t_k<t}L_{\hat{I}_k}\alpha(S^*(t_k))\bigg)\\&\leqslant M^*\bigg(L_{g_1}+TL_{g_1}+\frac{T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T[L_1(s)+L_2(s)+TL_hL_3(s)+TL_gL_4(s)]ds\bigg)\alpha_{PC}(S^*)\\&\quad+M^*\sum_{k=1}^m(L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})\alpha_{PC}(S^*)\\&\leqslant k\alpha_{PC}(S^*),\quad t\in J,\end{aligned}\tag{3.37}$$

其中

$$k=M^*\bigg(L_{g_1}+TL_{g_1}+\frac{T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T[L_1(s)+L_2(s)+TL_hL_3(s)+TL_gL_4(s)]ds+\sum_{k=1}^m(L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})\bigg).$$

从而由引理 2.4 可知, 对任意有界集 $S^*\subset\overline{Co}F(T_{R^*})\subset T_{R^*}$ 有

$$\alpha_{PC}(F(S^*))\leqslant k\alpha_{PC}(S^*).\tag{3.38}$$

由 (3.36) 知 $0<k<1$, 故由 Darbo 不动点定理可知, 算子 F 在 $\overline{Co}F(T_{R^*})\subset T_{R^*}\subset PC[J,X]$ 上至少有一个不动点 x^*, 即 x^* 是方程 (1.1)–(1.2) 在 $PC[J,X]$ 中的整体温和解. 证毕. □

注 3.1 定理 3.1 是在 $g_i:PC(J,X)\to X$ 是紧算子, 且 (3.8) 中的 $L_4(t)\equiv 0$ 的情形下, 利用广义 Darbo 不动点定理证明的, 这里函数 $L_i\in L^1(J,\mathbb{R}^+)$ $(i=1,2,3)$ 不受任何限制, 这一方法首次在文献 [26] 中使用, 定理 3.1 推广了许多作者的结果. 定理 3.2 是在不假设 $g_i:PC(J,X)\to X$ 是紧算子, 且也不假定 (3.8) 中的 $L_4(t)\equiv 0$, 但需要条件 (3.36) 的情形下, 利用 Darbo 不动点定理证明的.

3.2 预解算子紧条件下温和解的存在性

定理 3.3 若 $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 是紧的, 条件 (H_1)–(H_5) 成立, 则方程 (1.1)–(1.2) 在 $PC[J,X]$ 中至少存在一个整体温和解.

证明 由定理 3.1 容易证明, $F:T_{R_*}\to T_{R^*}$ 是有界连续算子, 并且 $\overline{Co}F(T_{R^*})$ 在 J_k 上等度连续. 下面证明算子 $F(T_{R^*})\subset PC(J,X)$ 是预紧集. 对于任意固定的 t $(0<t\leqslant T)$ 及 $0<\varepsilon<t$, 令 $x\in T_{R^*}$, 定义

$$\begin{aligned}(F_\varepsilon x)(t)=&C_\beta(t)[x_0-g_1(x)]+S_\beta(t)[x_1-g_2(x)]\\&+\int_0^{t-\varepsilon}P_\beta(t-s)f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\\&+\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(x(t_k))\\&+\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(x(t_k)),\quad t\in J.\end{aligned}\tag{3.39}$$

由 $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 的紧性及性质 2.4 容易得到, 对于任意 ε $(0<\varepsilon<t)$, 集 $\{(F_\varepsilon x)(t):x\in T_{R^*}\}$ 在 X 上是相对紧的. 对于任意的 $x\in T_{R^*}$, $t\in J$, 由于

$$\begin{aligned}&\|(Fx)(t)-(F_\varepsilon x)(t)\|\\&\leqslant\left\|\int_{t-\varepsilon}^{t}P_\beta(t-s)f(s,x(s),x(\tau(s)),(Hx)(s),(Gx)(s))ds\right\|\\&\leqslant\frac{\gamma' M^*T^\beta}{\Gamma(\beta)}[(2+h_0+g_0)R^*+(e_h+e_g)T]\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.40}$$

因此, 对任意 $t\in J$, $\{(Fx)(t):x\in T_{R^*}\}$ 是完全有界的, 即在 X 上是相对紧的. 由 Arzelá-Ascoli 定理知, $\{Fx:x\in T_{R^*}\}$ 是 $PC[J,X]$ 上的相对紧集. 故 $F:T_{R^*}\to T_{R^*}$ 是全连续算子, 从而, 由 Schauder 不动点定理可知, 问题 (1.1)–(1.2) 在 $T_{R^*}\subset PC(J,X)$ 上至少有一个整体温和解. 证毕. □

注 3.2 定理 3.3 是在 $\{C_\beta(t)\}_{t>0}$ 是紧的条件下, 不需要紧型条件证明的.

3.3 温和解的存在唯一性

本部分需要以下假设条件.

(G_1) 假设 $f:J\times X\times X\times X\times X\to X$ 是连续的, 且存在非负的 Lebesgue 可积函数 $L_i'\in L(J,\mathbb{R}^+)$ $(i=1,2,3,4)$, 对任意的 $u_i,v_i\in X$, $t\in(0,T)$, 满足

$$\|f(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\|\leqslant\sum_{i=1}^4L_i'(t)\|u_i-v_i\|.\tag{3.41}$$

(G_2) 存在非负常数 L_h' 和 $L_g'>0$, 使得对任意的 $u,v\in X$, 满足

$$\|h(t,s,u)-h(t,s,v)\|\leqslant L_h'\|u-v\|,\quad (t,s)\in\Delta_1,\tag{3.42}$$

$$\|g(t,s,u)-g(t,s,v)\|\leqslant L_g'\|u-v\|,\quad (t,s)\in\Delta_2.\tag{3.43}$$

(G_3) 存在非负常数 L_{I_k}' 和 $L_{\hat{I}_k}'>0$, 使得对任意的 $u,v\in X$, 满足

$$\|I_k(u)-I_k(v)\|\leqslant L_{I_k}'\|u-v\|,\tag{3.44}$$

$$\|\hat{I}_k(u)-\hat{I}_k(v)\|\leqslant L_{\hat{I}_k}'\|u-v\|.\tag{3.45}$$

(G_4) 存在非负常数 L'_{g_1} 和 $L'_{g_2}>0$, 使得对任意的 $u,v\in PC(J,X)$, 满足

$$\|g_1(u)-g_1(v)\|\leqslant L'_{g_1}\|u-v\|_{PC}, \tag{3.46}$$

$$\|g_2(u)-g_2(v)\|\leqslant L'_{g_2}\|u-v\|_{PC}. \tag{3.47}$$

(G_5) 条件 (G_1) 中的函数 $L'_i\in L(J,\mathbb{R}^+)$ $(i=1,2,3,4)$ 和条件 (G_2)–(G_4) 中的非负常数满足

$$\begin{aligned}\rho:=&\,M^*(L'_{g_1}+TL'_{g_2})+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^T(L'_1(s)+L'_2(s)+L'_hsL'_3(s)+TL'_gL'_4(s))ds\\&+M^*\sum_{k=1}^m(L'_{I_k}+TL'_{\hat{I}_k})<1.\end{aligned} \tag{3.48}$$

定理 3.4　若条件 (G_1)–(G_5) 成立, 则方程 (1.1)–(1.2) 在 $PC[J,X]$ 中存在唯一的整体温和解. 对任意的 $u_0\in PC(J,X)$, 迭代序列 $\{u_n\}$

$$\begin{aligned}u_n(t)=&\,C_\beta(t)[x_0-g_1(u_{n-1})]+S_\beta(t)[x_1-g_2(u_{n-1})]\\&+\int_0^tP_\beta(t-s)f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\tau(s)),(Hu_{n-1})(s),(Gu_{n-1})(s))ds\\&+\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(u_{n-1}(t_k))\\&+\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(u_{n-1}(t_k)),\quad t\in J,\quad n=1,2,3,\ldots\end{aligned} \tag{3.49}$$

在 $t\in J$ 上关于 X 中的范数一致收敛于方程 (1.1)–(1.2) 的唯一整体温和解 $x^*(t)$, 并且对由 (3.48) 所定义的实数 $\rho\in(0,1)$ 有

$$\|u_n-x^*\|_{PC}=O(\rho^n),\quad n\to+\infty. \tag{3.50}$$

证明　对于任意 $t\in J$, $u,v\in PC(J,X)$, 有

$$\begin{aligned}\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\|\leqslant&\,C_\beta(t)\|g_1(u)-g_1(v)\|+S_\beta(t)\|g_2(u)-g_2(v)\|\\&+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L'_1(s)\|u(s)-v(s)\|+L'_2(s)\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|\\&+L'_3(s)\|(Hu)(s)-(Hv)(s)\|+L'_4(s)\|(Gu)(s)-(Gv)(s)\|)ds\\&+\sum_{k=1}^mM^*\|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))\|\\&+\sum_{k=1}^mM^*T\|\hat{I}_k(u(t_k))-\hat{I}_k(v(t_k))\|\\\leqslant&\,(M^*L'_{g_1}+M^*TL'_{g_2})\|u-v\|_{PC}\\&+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L'_1(s)+L'_2(s)+L'_hsL'_3(s)+TL'_gL'_4(s))ds\|u-v\|_{PC}\\&+\sum_{k=1}^m(M^*L'_{I_k}+TM^*L'_{\hat{I}_k})\|u-v\|_{PC}\\\leqslant&\,\rho\|u-v\|_{PC},\end{aligned} \tag{3.51}$$

从而, $\|Fu-Fy\|_{PC}\leqslant\rho\|u-v\|_{PC}$. 由条件 (G_5) 知 $0<\rho<1$, 故由 Banach 压缩不动点定理可知, F 在 $PC(J,X)$ 上有唯一的不动点 x^*. 故方程 (1.1)–(1.2) 存在唯一整体温和解 $x^*\in PC(J,X)$, 并且 (3.49) 和 (3.50) 成立. 证毕. □

定理 3.5 假设 $g_i\equiv 0$ $(i=1,2)$ 且 (G_1)–(G_3) 成立, (G_1) 中的 $L_4'(t)\equiv 0$, $t\in J$, 且

$$a\equiv M^*\sum_{k=1}^{m}(L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})<1,$$

则方程 (1.1)–(1.2) 存在唯一的整体温和解 $x^*\in PC(J,X)$. 对任意的 $u_0\in PC(J,X)$, 迭代序列 $\{u_n\}$

$$\begin{aligned}u_n(t)&=C_\beta(t)x_0+S_\beta(t)x_1\\&\quad+\int_0^t P_\beta(t-s)f(s,u_{n-1}(s),u_{n-1}(\tau(s)),(Hu_{n-1})(s),(Gu_{n-1})(s))ds\\&\quad+\sum_{0<t_k<t}C_\beta(t-t_k)I_k(u_{n-1}(t_k^-))\\&\quad+\sum_{0<t_k<t}S_\beta(t-t_k)\hat{I}_k(u_{n-1}(t_k^-)),\quad t\in J,\quad n=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{3.52}$$

在 $t\in J$ 上关于 X 中的范数一致收敛于方程 (1.1)–(1.2) 的唯一整体温和解 $x^*(t)$, 并且对任意实数 $s>0$, 有

$$\|u_n-x^*\|_{PC}=o\left(\frac{1}{n^s}\right),\quad n\to+\infty.\tag{3.53}$$

证明 对于任意 $t\in J$, $u,v\in PC(J,X)$, 有

$$\begin{aligned}&\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\|\\&\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L_1'(s)\|u(s)-v(s)\|+L_2'(s)\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|+L_3'(s)\|(Hu)(s)-(Hv)(s)\|)ds\\&\quad+\sum_{k=1}^{m}M^*\|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))\|+\sum_{k=1}^{m}M^*T\|\hat{I}_k(u(t_k))-\hat{I}_k(v(t_k))\|\\&\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L_1'(s)+L_h'sL_3'(s))\|u(s)-v(s)\|ds+\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t L_2'(s)\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds\\&\quad+\sum_{k=1}^{m}(M^*L_{I_k}'+TM^*L_{\hat{I}_k}')\|u(t_k^-)-v(t_k^-)\|\\&\leqslant\int_0^t B_1(s)\|u(s)-v(s)\|ds+\int_0^t B_2(s)\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds\\&\quad+\sum_{k=1}^{m}(M^*L_{I_k}'+TM^*L_{\hat{I}_k}')\|u-v\|_{PC}\\&\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L_1'(s)+L_2'(s)+L_h'sL_3'(s))ds\|u-v\|_{PC}+a\|u-v\|_{PC},\end{aligned}\tag{3.54}$$

其中 $B_1(t)=\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}[L_1'(t)+TL_hL_3'(t)]$, $B_2(t)=\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}L_2'(t)$, 显然, $B_i\in L^1(J,\mathbb{R}^+)$ $(i=1,2)$. 由 $a\equiv M^*\sum_{k=1}^m(L_{I_k}+TL_{\hat{I}_k})<1$, 存在 $0<\varepsilon_1<1$, 使得 $0<b\equiv\varepsilon_1+a<1$, 从而存在连续函数 $\varphi_i:J\to\mathbb{R}^1$ 满足

$$\int_0^T|B_i(s)-\varphi_i(s)|ds<\frac{\varepsilon_1}{2}.\tag{3.55}$$

故由算子 F 的定义 (3.12) 和假设 (G_1)–(G_3), 有

$$\begin{aligned}
&\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\|\\
&\quad\leqslant\int_0^t|B_1(s)-\varphi_1(s)|\|u(s)-v(s)\|ds+\int_0^t|\varphi_1(s)|\|u(s)-v(s)\|ds\\
&\qquad+\int_0^t|B_2(s)-\varphi_2(s)|\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds+\int_0^t|\varphi_2(s)|\|u(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds\\
&\qquad+\sum_{k=1}^m(M^*L'_{I_k}+TM^*L'_{\hat{I}_k})\|u(t_k)-v(t_k)\|\\
&\quad\leqslant\int_0^t|B_1(s)-\varphi_1(s)|ds\|u-v\|_{PC}+\int_0^t|B_2(s)-\varphi_2(s)|ds\|u-v\|_{PC}+\Psi t\|u-v\|_{PC}\\
&\quad\leqslant\varepsilon_1\|u-v\|_{PC}+\Psi t\|u-v\|_{PC}+a\|u-v\|_{PC}\\
&\quad\leqslant(b+\Psi t)\|u-v\|_{PC}\\
&\quad=\left(C_1^0b+C_1^1\frac{(\Psi t)}{1!}\right)\|u-v\|_{PC},\quad t\in J,
\end{aligned}\tag{3.56}$$

其中 $\Psi=\max\{|\varphi_1(t)|+|\varphi_2(t)|:t\in J\}$.

下面利用数学归纳法证明, 对于任意自然数 $n\in\mathbb{N}$, $t\in J$ 有

$$\|(F^nu)(t)-(F^nv)(t)\|\leqslant\left[C_n^0b^n+C_n^1b^{n-1}(\Psi t)+\frac{C_n^2b^{n-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_n^n\frac{(\Psi t)^n}{n!}\right]\|u-v\|_{PC}.\tag{3.57}$$

假设 (3.57) 对 $n=k$ 成立, 即对任意的 $t\in J$, 下式成立:

$$\|(F^ku)(t)-(F^kv)(t)\|\leqslant\left[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\right]\|u-v\|_{PC}.\tag{3.58}$$

下面证明 (3.57) 在 $n=k+1$ 时成立.

由算子 F 的定义 (3.12) 和假设 (G_1)–(G_3), 类似 (3.56) 的证明, 有

$$\begin{aligned}
&\|(F^{k+1}u)(t)-(F^{k+1}v)(t)\|\\
&\quad=\|(F(F^ku))(t)-(F(F^kv))(t)\|\\
&\quad\leqslant\frac{M^*T^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(L'_1(s)\|(F^ku)(s)-(F^kv)(s)\|+L'_2(s)\|(F^ku)(\tau(s))-v(\tau(s))\|\\
&\qquad+L'_3(s)\|H(F^ku)(s)-H(F^kv)(s)\|)ds\\
&\qquad+\sum_{0<t_k<t}M^*\|I_k(F^ku)(t_k)-I_k(F^kv)(t_k)\|+\sum_{0<t_k<t}M^*T\|\hat{I}_k(F^ku)(t_k)-\hat{I}_k(F^kv)(t_k)\|\\
&\quad\leqslant\int_0^t|B_1(s)-\varphi_1(s)|\|(F^ku)(s)-(F^kv)(s)\|ds+\int_0^t|\varphi_1(s)|\|(F^ku)(s)-(F^kv)(s)\|ds\\
&\qquad+\int_0^t|B_2(s)-\varphi_2(s)|\|(F^ku)(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds+\int_0^t|\varphi_2(s)|\|(F^ku)(\tau(s))-v(\tau(s))\|ds\\
&\qquad+\sum_{0<t_k<t}(M^*L'_{I_k}+TM^*L'_{\hat{I}_k})\|(F^ku)(t_k)-(F^ku)(t_k)\|\\
&\quad\leqslant\int_0^t|B_1(s)-\varphi_1(s)|\left[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi s)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi s)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi s)^k}{k!}\right]ds\|u-v\|_{PC}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t|\varphi_1(s)|\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi s)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi s)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi s)^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}\\
&+\int_0^t|B_2(s)-\varphi_2(s)|\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi\tau(s))+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi\tau(s))^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi\tau(s))^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}\\
&+\int_0^t|\varphi_2(s)|\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi\tau(s))+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi\tau(s))^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi\tau(s))^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}ds\\
&+a\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\bigg]\|u-v\|_{PC}\\
\leqslant&\ \frac{\varepsilon_1}{2}\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\bigg]\|u-v\|_{PC}\\
&+\max_{t\in J}|\varphi_1(t)|\int_0^t\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi s)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi s)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi s)^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}\\
&+\frac{\varepsilon_1}{2}\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\bigg]\|u-v\|_{PC}\\
&+\max_{t\in J}|\varphi_2(t)|\int_0^t\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi\tau(s))+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi\tau(s))^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi\tau(s))^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}\\
&+a\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\bigg]\|u-v\|_{PC}\\
\leqslant&\ b\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi t)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi t)^k}{k!}\bigg]\|u-v\|_{PC}\\
&+\Psi\int_0^t\bigg[C_k^0b^k+C_k^1b^{k-1}(\Psi s)+\frac{C_k^2b^{k-2}(\Psi s)^2}{2!}+\cdots+C_k^n\frac{(\Psi s)^k}{k!}\bigg]ds\|u-v\|_{PC}\\
\leqslant&\ \bigg[C_{k+1}^0b^{k+1}+C_{k+1}^1b^k(\Psi t)+\frac{C_{k+1}^2b^{k-1}(\Psi t)^2}{2!}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}\frac{(\Psi t)^{k+1}}{(k+1)!}\bigg]\|u-v\|_{PC},\quad t\in J.
\end{aligned}\tag{3.59}
$$

因此, 对任意自然数 $n\in\mathbb{N}$, (3.57) 成立. 故对任意自然数 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$
\|F^nu-F^nv\|_{PC}\leqslant\bigg[C_n^0b^n+C_n^1b^{n-1}(\Psi T)+\frac{C_n^2b^{n-2}(\Psi T)^2}{2!}+\cdots+C_n^n\frac{(\Psi T)^n}{n!}\bigg]\|u-v\|_{PC}.\tag{3.60}
$$

由引理 2.8 知,

$$
\|F^nu-F^nv\|_{PC}=o\bigg(\frac{1}{n^s}\bigg)\|u-v\|_{PC},\quad n\to\infty.\tag{3.61}
$$

故由广义的 Banach 压缩不动点定理可知, F 在 $PC(J,X)$ 上存在唯一的不动点 x^*, 从而方程 (1.1) 和 (1.2) 存在唯一的整体温和解 $x^*\in PC(J,X)$, 并且 (3.52) 和 (3.53) 成立. 证毕. □

注 3.3 定理 3.4 是在各函数满足 Lipschitz 条件下利用 Banach 压缩原理证明的. 定理 3.5 是在假设 $g_i\equiv 0$ $(i=1,2)$、(G_1)–(G_3) 成立且 (3.41) 中的 $L_4'(t)\equiv 0$ 和 $t\in J$ 的情形下利用广义的 Banach 压缩原理证明的. 定理 3.5 中的函数 $L_i\in L^1(J,\mathbb{R}^+)$ $(i=1,2,3)$ 不受任何限制, 这一方法首次在文献 [62] 中使用. 定理 3.5 推广了许多作者的结果. 文献 [25,41] 也利用了文献 [62] 中的方法.

4 例子

假设 $(p,t)\in[0,\pi]\times[0,1]$, 考虑如下分数阶偏微分方程:

$$
\begin{cases}
{}_0^C D_t^{\beta} x(p,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} x(p,t) + \dfrac{x(p,t)}{1+4\sqrt{t}} + 2\mathrm{e}^{-2t}\sin(x(p,t-\tau)) + \dfrac{1}{1+t}\displaystyle\int_0^t tx(p,s)\cos s ds \\
\qquad\qquad\qquad + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}\cos\left[\displaystyle\int_0^1 \dfrac{s\sin t}{2} x(p,s)ds\right], \quad t\in[0,1], \quad t\neq \dfrac{1}{2}, \\
x\left(p,\dfrac{1}{2}^+\right) - x\left(p,\dfrac{1}{2}^-\right) = \dfrac{x(p,\frac{1}{2})}{2+x(p,\frac{1}{2})}, \\
x(0,t) = x(\pi,t) = 0, \\
x(p,0) + \dfrac{1}{8}(x+\cos x) = x_0(p), \quad 0<p<\pi, \\
\dfrac{\partial x}{\partial t}(p,0) + \dfrac{1}{16}(x+\sin x) = x_1(p), \quad 0<p<\pi,
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

其中 $\beta=\frac{3}{2}$, $T=1$.

令 $X=L^2([0,\pi])$, $A: D(A)\subset X\to X$, $A(x)=\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, $D(A)=\{x\in X: x''\in X, x(0)=x(\pi)=0\}$, 那么 A 是指数有界解算子 $C_\beta(t)$ 的无穷小生成元, $M^*=\sup_{t\geqslant 0}\|C_\beta(t)\|$. 令

$$
\begin{aligned}
& x(t)=x(\cdot,t), \quad \tau(t)=t-\tau\leqslant t, \quad (Hx)(t)=\int_0^t tx(s)\cos s ds, \\
& (Gx)(t)=\int_0^1 \sin(tsx(s))ds, \\
& h(t,s,u)=tu\cos s, \quad g(t,s,u)=\sin(tsu), \\
& g_1(x)=\frac{1}{8}(x+\cos x), \quad g_2(x)=\frac{1}{16}(x+\sin x), \\
& f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{x_1}{1+4\sqrt{t}}+2\mathrm{e}^{-2t}\sin x_2+\frac{1}{1+t}x_3+\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\cos x_4, \\
& I(x)=\frac{x}{2+x}, \quad x_0=x_0(p), \quad x_1=x_1(p),
\end{aligned}
$$

那么方程 (4.1) 可以写成抽象形式

$$
\begin{cases}
{}_0^C D_t^{\beta} x(t) = Ax(t) + f(t,x(t),x(\tau(t)),(Hx)(t),(Gx)(t)), \quad t\in J:=[0,1], \quad t\neq\dfrac{1}{2}, \\
\Delta x\,|_{t=\frac{1}{2}} = I\left(x\left(\dfrac{1}{2}\right)\right), \\
x(0)+g_1(x)=x_0\in X, \quad x'(0)+g_2(x)=x_1\in X,
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

由上面的表达式可知, $\forall\, u_i, v_i\in X$, $t\in(0,T)$, 满足

$$
\begin{aligned}
\|f(t,u_1,u_2,u_3,u_4)-f(t,v_1,v_2,v_3,v_4)\| &\leqslant \frac{1}{1+4\sqrt{t}}\|u_1-v_1\|+2\mathrm{e}^{-2t}\|u_2-v_2\| \\
&\quad + \frac{1}{1+t}\|u_3-v_3\|+\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\|u_4-v_4\|, \\
\|h(t,s,u)-h(t,s,v)\| &\leqslant \|u-v\|, \quad (t,s)\in\Delta_1, \quad u,v\in X, \\
\|g(t,s,u)-g(t,s,v)\| &\leqslant \|u-v\|, \quad (t,s)\in\Delta_2, \quad u,v\in X, \\
\|g_1(u)-g_1(v)\| \leqslant \frac{1}{4}\|u-v\|_{PC}, &\quad \|g_2(u)-g_2(v)\|\leqslant\frac{1}{8}\|u-v\|_{PC}, \quad u,v\in PC(J,X), \\
\|I(u)-I(v)\| &\leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|, \quad u,v\in X.
\end{aligned}
$$

经过计算可知, 条件 (G_5) 中的 ρ 为

$$\begin{aligned}\rho&=M^*\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{M^*}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^1\left(\frac{1}{1+4\sqrt{2}}+2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{t}{1+t}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right)dt+\frac{M^*}{2}\\&=\frac{7}{8}M^*+\frac{2M^*}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{8}\ln 5-\mathrm{e}^{-2}-\ln(1+\mathrm{e})\right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

若 (4.3) 中的 $\rho<1$, 则由定理 3.4 可知问题 (4.1) 存在唯一整体温和解 $x^*\in PC(J,X)$, 由 (3.49) 所定义的迭代序列 $\{u_n\}$ 在 $[0,1]$ 上关于 X 中的范数一致收敛于方程 (4.1) 的唯一整体温和解 $x^*(t)$, 并且对任意实数 $s>1$ 有

$$\|u_n-x^*\|_{PC}=o\left(\frac{1}{n^s}\right),\quad n\to+\infty.$$

致谢 作者对审稿人所提出的修改意见表示衷心的感谢.

参考文献

1 Milici C, Drăgănescu G, Machado J T. Introduction to Fractional Differential Equations. New York: Springer, 2019
2 Das S. Functional Fractional Calculus. New York: Springer, 2011
3 Abbas S, Benchohra M, N′Guérékata G M. Topics in Fractional Differential Equations. New York: Springer, 2012
4 Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999
5 Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations (Volume 204). Amsterdam: Elsevier, 2006
6 Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. New York: Springer, 2010
7 Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 1983
8 Vrabie I I. C_0-Semigroups and Applications, North-Holland Mathematics Studies, vol. 191. Amsterdam: Elsevier, 2003
9 Banasiak J, Arlotti L. Perturbations of Positive Semigroups with Applications. London: Springer, 2006
10 Chen P, Li Y. Monotone iterative method for abstract impulsive integro-differential equations with nonlocal conditions in Banach spaces. Appl Math, 2014, 59: 99–120
11 Chen P, Li Y. Mixed monotone iterative technique for a class of semilinear impulsive evolution equations in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2011, 74: 3578–3588
12 Chen P, Li Y. Existence of mild solutions for fractional evolution equations with mixed monotone nonlocal conditions. Z Angew Math Phys, 2014, 65: 711–728
13 Chen P, Li Y. Monotone iterative technique for a class of semilinear evolution equations with nonlocal conditions. Results Math, 2013, 63: 731–744
14 Fan H, Li Y. Monotone iterative technique for the elastic systems with structural damping in Banach spaces. Comput Math Appl, 2014, 68: 384–391
15 Li B, Gou H. Monotone iterative method for the periodic boundary value problems of impulsive evolution equations in Banach spaces. Chaos Solitons Fractals, 2018, 110: 209–215
16 Magal P, Seydi O, Wang F B. Monotone abstract non-densely defined Cauchy problems applied to age structured population dynamic models. J Math Anal Appl, 2019, 479: 450–481
17 Chen P, Li Y, Yang H. Perturbation method for nonlocal impulsive evolution equations. Nonlinear Anal Hybrid Syst, 2013, 8: 22–30
18 孙经先, 张晓燕. 凸幂凝聚算子的不动点定理及其对抽象半线性发展方程的应用. 数学学报, 2005, 48: 439–446
19 Olszowy L. Existence of mild solutions for the semilinear nonlocal problem in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2013, 81: 211–223
20 Zhu T, Song C, Li G. Existence of mild solutions for abstract semilinear evolution equations in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2012, 75: 177–181
21 Byszewski L. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. J Math Anal Appl, 1991, 162: 494–505

22 Byszewski L, Lakshmikantham V. Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space. Appl Anal, 1991, 40: 11–19
23 Ji S, Li G. A unified approach to nonlocal impulsive differential equations with the measure of noncompactness. Adv Difference Equ, 2012, doi: 10.1186/1687-1847-2012-182
24 Fan Z, Li G. Existence results for semilinear differential equations with nonlocal and impulsive conditions. J Funct Anal, 2010, 258: 1709–1727
25 Hao X, Liu L. Mild solution of semilinear impulsive integro-differential evolution equation in Banach spaces. Math Methods Appl Sci, 2017, 40: 4832–4841
26 Liu L, Guo F, Wu C, et al. Existence theorems of global solutions for nonlinear Volterra type integral equations in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2005, 309: 638–649
27 Lizama C, Rueda S. Nonlocal integrated solutions for a class of abstract evolution equations. Acta Appl Math, 2019, 164: 165–183
28 Hao X, Liu L. Mild solution of second-order impulsive integro-differential evolution equations of Volterra type in Banach spaces. Qual Theory Dyn Syst, 2020, doi: 10.1007/s12346-020-00345-w
29 Henríquez H R, Poblete V, Pozo J C. Mild solutions of non-autonomous second order problems with nonlocal initial conditions. J Math Anal Appl, 2014, 412: 1064–1083
30 Gambera L R, Lizama C, Prokopczyk A. Well-posedness for the abstract Blackstock-Crighton-Westervelt equation. J Evol Equ, 2020, doi: 10.1007/s00028-020-00580-3
31 Zhu B, Liu L, Wu Y. Local and global existence of mild solutions for a class of nonlinear fractional reaction-diffusion equations with delay. Appl Math Lett, 2016, 61: 73–79
32 Chen P, Li Y, Chen Q, et al. On the initial value problem of fractional evolution equations with noncompact semigroup. Comput Math Appl, 2014, 67: 1108–1115
33 Zhu B, Liu L, Wu Y. Existence and uniqueness of global mild solutions for a class of nonlinear fractional reaction-diffusion equations with delay. Comput Math Appl, 2019, 78: 1811–1818
34 朱波, 韩宝燕, 刘立山. 一类混合型分数阶半线性积分 - 微分方程解的存在性. 数学物理学报, 2019, 39: 1334–1341
35 Wang J R, Zhou Y, Fečkan M. On the nonlocal Cauchy problem for semilinear fractional order evolution equations. Cent Eur J Math, 2014, 12: 911–922
36 Li F, Liang J, Xu H K. Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions. J Math Anal Appl, 2012, 391: 510–525
37 Li K, Peng J, Gao J. Existence results for semilinear fractional differential equations via Kuratowski measure of noncompactness. Fract Calc Appl Anal, 2012, 15: 591–610
38 Wang R N, Xiao T J, Liang J. A note on the fractional Cauchy problems with nonlocal initial conditions. Appl Math Lett, 2011, 24: 1435–1442
39 Zhou Y, Jiao F. Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations. Nonlinear Anal Real World Appl, 2010, 11: 4465–4475
40 Gou H, Li B. Local and global existence of mild solution to impulsive fractional semilinear integro-differential equation with noncompact semigroup. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2017, 42: 204–214
41 朱波, 刘立山. 带瞬时脉冲的分数阶非自制发展方程解的存在唯一性. 数学物理学报, 2019, 39: 105–113
42 Shu X B, Wang Q. The existence and uniqueness of mild solutions for fractional differential equations with nonlocal conditions of order $1 < \beta < 2$. Comput Math Appl, 2012, 64: 2100–2110
43 Zhu B, Liu L, Wu Y. Local and global existence of mild solutions for a class of semilinear fractional integro-differential equations. Fract Calc Appl Anal, 2017, 20: 1338–1355
44 Luong V T. Decay mild solutions for two-term time fractional differential equations in Banach spaces. J Fixed Point Theory Appl, 2016, 18: 417–432
45 Vijayakumar V, Murugesu R, Poongodi R, et al. Controllability of second-order impulsive nonlocal Cauchy problem via measure of noncompactness. Mediterr J Math, 2017, doi: 10.1007/s00009-016-0813-6
46 Ge F D, Zhou H C, Kou C H. Approximate controllability of semilinear evolution equations of fractional order with nonlocal and impulsive conditions via an approximating technique. Appl Math Comput, 2016, 275: 107–120
47 Mahmudov N I. Partial-approximate controllability of nonlocal fractional evolution equations via approximating method. Appl Math Comput, 2018, 334: 227–238
48 Qin H, Zuo X, Liu J, et al. Approximate controllability and optimal controls of fractional dynamical systems of order $1 < q < 2$ in Banach spaces. Adv Difference Equ, 2015, 2015: 73
49 Mahmudov N I, Zorlu S. On the approximate controllability of fractional evolution equations with compact analytic semigroup. J Comput Appl Math, 2014, 259: 194–204
50 Li K, Peng J, Gao J. Controllability of nonlocal fractional differential systems of order $\alpha \in (1, 2]$ in Banach spaces.

Rep Math Phys, 2013, 71: 33–43
51 Qin H, Zhang C, Li T, et al. Controllability of abstract fractional differential evolution equations with nonlocal conditions. J Math Comput Sci, 2017, 17: 293–300
52 Agarwal R P, Lakshmikantham V, Nieto J J. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. Nonlinear Anal, 2010, 72: 2859–2862
53 Fečkan M, Wang J R, Zhou Y. On the new concept of solutions and existence results for impulsive fractional evolution equations. Dyn Partial Differ Equ, 2011, 8: 345–361
54 Hu J B. Comment on "Periodically intermittent control strategies for α-exponential stabilization of fractional-order complex-valued delayed neural networks". Nonlinear Dynam, 2019, 98: 2423–2426
55 Fečkan M, Zhou Y, Wang J R. On the concept and existence of solution for impulsive fractional differential equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2012, 17: 3050–3060
56 Banas J, Goebel K. Measure of Noncompactness in Banach Spaces. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 60. New York: Marcel Dekker, 1980
57 Guo D, Cho Y, Zhu J. Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems. New York: Nova Science Publishers, 2004
58 Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. London: World Scientific, 1989
59 Liu L. Iterative method for solutions and coupled quasi-solutions of nonlinear integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2000, 42: 583–598
60 Guo F, Liu L, Wu Y, et al. Global solutions of initial value problems for nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2005, 61: 1363–1382
61 Liu L, Wu C, Guo F. Existence theorems of global solutions of initial value problems for nonlinear integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces and applications. Comput Math Appl, 2004, 47: 13–22
62 Liu L, Wu Y, Zhang X. On well-posedness of an initial value problem for nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of Volterra type in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2006, 317: 634–649

Existence and uniqueness of mild solutions for fractional impulsive integro-differential evolution equations of order $1 < \beta \leqslant 2$ with nonlocal conditions

Lishan Liu & Haiyong Qin

Abstract This paper investigates the existence and uniqueness of mild solutions for fractional impulsive integro-differential evolution equations with nonlocal conditions of order $1 < \beta \leqslant 2$. Under two cases where the solution operator is compact and noncompact respectively, the existence results of mild solutions are established by the (generalized) Darbo fixed point theorem and Schauder fixed point theorem. Meanwhile, uniqueness of mild solutions is also given by the (generalized) Banach contraction mapping principle. These results are obtained by the semigroup theorem, solution operator theorems, measures of noncompactness and fixed point theorem. At last, an example is presented to illustrate the effectiveness of the main results.

Keywords **fractional integro-differential evolution equation, measures of noncompactness, solution operator, mild solution, existence and uniqueness**

MSC(2010) **26A33, 34A08, 34A12, 34A37, 34B10, 34K30, 47D06, 47H08, 47H10, 47J35**

doi: 10.1360/SSM-2020-0197