中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 3 期: 649 ~ 666
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

综 述

Anosov 映射不变子丛可积的刚性

献给文兰教授 80 寿辰

辜睿皓[1], 史逸[2*]

1. 复旦大学上海数学中心, 上海 200438;
2. 四川大学数学学院, 成都 610065
E-mail: ruihaogu@fudan.edu.cn, shiyi@scu.edu.cn

收稿日期: 2024-10-08; 接受日期: 2024-12-13; 网络出版日期: 2025-01-23; * 通信作者
国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1001900)、国家自然科学基金 (批准号: 12071007 和 12090015)、中国博士后科学基金 (批准号: 2024M750486) 和国家资助博士后研究人员计划 (批准号: GZB20240166) 资助项目

摘要 本文总结了近年来作者对 Anosov 映射及其同伦类关于不变子丛可积蕴涵的刚性现象的研究. 对于 Anosov 微分同胚, 本文给出了其强子丛的联合可积性与中心子丛的 Lyapunov 指数谱刚性的等价刻画. 在此基础上, 本文进一步证明了, 对于在部分双曲映射之集中同伦于 Anosov 微分同胚的、具有一维中心子丛的微分同胚, 其稳定子丛与不稳定子丛联合可积, 当且仅当其周期点处沿中心子丛的 Lyapunov 指数与线性部分的相等. 对于不可逆 Anosov 可微映射, 通过建立其在不稳定子丛的可积性、稳定指数的刚性以及拓扑共轭的存在性之间的联系, 本文给出了这类非结构稳定的系统在拓扑共轭意义下的分类, 同时研究了其同伦类的半共轭刚性.

关键词 一致双曲性 部分双曲性 Lyapunov 指数 可积性 刚性

MSC (2020) 主题分类 37C05, 37C15, 37D20

1 引言

动力系统中的刚性问题关注的是两个或多个系统之间的某种 “弱等价” 关系是否蕴涵着某种 “强等价” 关系. 就一致双曲系统与部分双曲系统而言, 其刚性现象在数十年来被持续挖掘研究, 如上同调方程解的存在性及其正则度的提升 [13,14,34,42–45,74]、同伦系统之间拓扑半共轭或拓扑共轭的存在性 [17,18]、周期数据蕴涵拓扑共轭的光滑性 [12,22,24–26,29]、体积测度意义下 Lyapunov 指数刻画光滑共轭 [4,27,66] 等.

在研究具备双曲性系统的刚性、遍历性与结构稳定性等问题时, (不变的) 叶状结构能将系统的动力学行为简化、将维数降低、将问题约化, 起着至关重要的作用. (部分) 双曲系统与非一致双曲系统的叶状结构已然成为了相对独立的课题 (参见文献 [6,9,23,38,51,58,59,65]). 而叶状结构的刚性问题也

英文引用格式: Gu R H, Shi Y. Rigidity on integrability of invariant bundles of Anosov maps (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 649–666, doi: 10.1360/SSM-2024-0307

被广泛且深入地研究, 如光滑的双曲叶状结构刻画系统的光滑共轭类[7,16,20,21,39] 和绝对连续的 (或光滑的) 中心叶状结构限制系统的光滑结构[5,6,28] 等.

以往的研究聚焦于对已经存在的不变叶状结构提出光滑性条件, 从而探寻其中的刚性现象. 本文从不变子丛的可积性 (或不变叶状结构的存在性) 的角度出发探索 (部分) 双曲系统的刚性问题. 我们着重关注在整个流形上具备一致双曲性的系统, 即 Anosov 系统. 继 Anosov 微分同胚与一致扩张的局部微分同胚之后, Mañé 和 Pugh[47] 于 1975 年引入了 Anosov 映射这一概念. 方便起见, 约定本文的流形 M 是光滑的、紧致无边的 Riemann 流形.

定义 1.1 称一个局部微分同胚 $f: M \to M$ 是 Anosov 映射, 如果存在一个 Df- 不变的、连续的子丛 (称为稳定子丛) $E^s_f \subset TM$, 使得

(1) Df 限制在 E^s_f 上一致压缩;

(2) Df 在商丛 TM/E^s_f 上诱导的映射是一致扩张的.

注 1.1 当 E^s_f 平凡时, 称 f 是扩张映射. 当 f 是微分同胚时, 称 f 是 Anosov 微分同胚, 此时切丛上具有一个 Df- 不变的直和分解 $TM = E^s_f \oplus E^u_f$, 使得 Df 限制在子丛 E^u_f (称为不稳定子丛) 上扩张.

不难发现, 当 Anosov 映射 f 不可逆且非扩张时, 其扩张方向往往依赖于其逆向轨道的选取, 同时一个逆向轨道也唯一决定了沿着该轨道扩张的方向. 由此, 一个自然地定义 Anosov 映射的方式是沿着轨道给出双曲分解. 记映射 $f: M \to M$ 的轨道空间 (亦称逆极限空间) 为 M_f,

$$M_f := \{\tilde{x} = (x_i) \in M^{\mathbb{Z}} \mid f(x_i) = x_{i+1}, \forall\, i \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $M^{\mathbb{Z}}$ 取乘积拓扑. 下面利用轨道空间给出 Anosov 映射的等价定义, 该定义由 Przytycki[56] 给出, 两个定义方式的等价性的证明可参见文献 [67].

定义 1.2 称一个局部微分同胚 $f: M \to M$ 是 Anosov 映射, 若存在常数 $C > 0$ 与 $0 < \mu < 1$, 使得对每一个轨道 $\tilde{x} = (x_i) \in M_f$, 存在 Df- 不变的切丛分解

$$T_{x_i}M = E^s_f(x_i, \tilde{x}) \oplus E^u_f(x_i, \tilde{x}), \quad \forall\, i \in \mathbb{Z},$$

且对于任意 $n > 0$, $i \in \mathbb{Z}$ 以及 $v^{s/u} \in E^{s/u}_f(x_i, \tilde{x})$ 有

$$\|D_{x_i} f^n(v^s)\| \leqslant C\mu^n \|v^s\| \quad 且 \quad \|D_{x_i} f^n(v^u)\| \geqslant C^{-1}\mu^{-n}\|v^u\|.$$

注 1.2 稳定方向 $E^s_f(x_i, \tilde{x})$ 与轨道的选取无关, 故记为稳定子丛 E^s_f. 由稳定流形定理可知, E^s_f 是唯一可积的, 即存在叶状结构 $\mathcal{F}^s_f$ 切于子丛 E^s_f, 使得过点 x 的、处处切于 E^s_f 的曲线均位于单条叶片 $\mathcal{F}^s_f(x)$ 上. 不稳定方向 $E^u_f(x_i, \tilde{x})$ 往往与轨道的选取有关. 显然, Anosov 微分同胚和扩张映射的双曲分解与轨道的选取无关. 当不稳定方向与轨道选取无关时, 称其构成不稳定子丛 E^u_f. 特别地, 它也是唯一可积的. 关于 (不) 稳定子丛的唯一可积性 (稳定流形定理) 的证明可参见文献 [72].

定义 1.3 称一个局部微分同胚 $f: M \to M$ 是部分双曲的, 如果存在常数 $C > 0$ 与 $0 < \mu < 1$, 以及对每一个轨道 $\tilde{x} = (x_i) \in M_f$, 存在 Df- 不变的控制分解

$$T_{x_i}M = E^s_f(x_i, \tilde{x}) \oplus E^c_f(x_i, \tilde{x}) \oplus E^u_f(x_i, \tilde{x}), \quad \forall\, i \in \mathbb{Z},$$

即存在 $n > 0$ 使得对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, 有

$$\|Df^n|_{E^s_f(x_i,\tilde{x})}\| < m(Df^n|_{E^c_f(x_i,\tilde{x})}) < \|Df^n|_{E^c_f(x_i,\tilde{x})}\| < m(Df^n|_{E^u_f(x_i,\tilde{x})})$$

并且 Df 在 $E^{s/u}_f$ 上一致压缩/扩张 (见定义 1.2), 这里 $m(\cdot)$ 是线性算子的小模, 即 $m(L) = \|L^{-1}\|^{-1}$.

称切方向 E_f^s, E_f^c 和 E_f^u 分别为 f 的稳定方向、中心方向和不稳定方向, 它们允许是平凡的, 但 E_f^s 和 E_f^u 至少有一个非平凡. 当 E_f^s 平凡时, 称 f 是 cu- 部分双曲的; 当 E_f^u 平凡时, 称 f 是 sc- 部分双曲的. 称局部微分同胚 f 是绝对部分双曲的, 如果存在 $0<\mu_1<1<\mu_2$ 与 $n\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $\tilde{x}=(x_i)\in M_f$ 和任意 $i\in\mathbb{Z}$ 有

$$\|Df^n|_{E_f^s(x_i,\tilde{x})}\|<\mu_1<m(Df^n|_{E_f^c(x_i,\tilde{x})})\leqslant\|Df^n|_{E_f^c(x_i,\tilde{x})}\|<\mu_2<m(Df^n|_{E_f^u(x_i,\tilde{x})}).$$

与注 1.2 类似, 稳定方向与轨道选取无关, 故称 E_f^s 为 f 的稳定子丛; 但一个点的中心方向与不稳定方向往往依赖于轨道的选取, 当中心方向或不稳定方向与轨道选取无关时, 称其为中心子丛或不稳定子丛. 特别地, 这里的稳定子丛、中心子丛和不稳定子丛均是 Df- 不变的子丛. 注意到, (不) 稳定子丛具有唯一可积性, 但中心子丛不一定可积 (参见文献 [52]).

2 Anosov 微分同胚的刚性

本节介绍环面 Anosov 微分同胚 (及其同伦类) 的子丛联合可积的刚性理论. 一般地, 考虑微分同胚 $f: M\to M$ 具有 (不变的) 部分双曲分解

$$TM=E_f^s\oplus E_f^c\oplus E_f^u.$$

Pugh 和 Shub [57] 在研究保体积部分双曲系统的稳定遍历性时, 提出了一个重要的判据—su- 可达性, 即流形上任意两点可由若干条切于 E_f^s 或 E_f^u 的曲线连接. 他们猜测 su- 可达性蕴涵了遍历性, 并且具备 (本质的) su- 可达性的系统在保体积的部分双曲系统中是 C^1- 开且 C^r- 稠密的. 这里, "本质可达性" 是指流形上去除 Lebesgue 零测集后的点集具有可达性.

有丰富的证据表明 "绝大多数" 系统是 su- 可达的, 如中心一维时 su- 可达性是开稠的 (参见文献 [62]). 少部分的非 su- 可达的系统是否有更多的刚性现象? Rodriguez Hertz [61] 在研究环面部分双曲自同构的稳定遍历性时, 证明了线性系统的小扰动要么是 su- 可达的, 要么是 su- 联合可积的 (后文简称为 su- 可积)—存在切于 $E_f^s\oplus E_f^u$、维数为 $\dim(E_f^s\oplus E_f^u)$ 的叶状结构. 对一些特定的系统 (如 3- 维环面的 Anosov 系统或其部分双曲的同伦类), 也有学者证明了其具有 su- 可达或 su- 可积的二分性质 (参见文献 [36, 37, 60]). 基于上述非 su- 可达在几何上的刚性现象 (即 su- 可积), 我们进一步考虑子丛 $E_f^s\oplus E_f^u$ 的可积性蕴涵的更多动力学性质. 我们将观察到, 在一些系统中, su- 可积性可以等价地被系统在中心子丛 E_f^c 上的 Lyapunov 指数刻画. 这些系统包含环面双曲系统的中心一维的同伦类 (参见第 2.1 小节) 和具备高维中心子丛的环面双曲系统 (参见第 2.2 小节).

2.1 具备一维中心丛的同伦系统

Anosov 映射的同伦类系统 (也称为 DA (derived from Anosov) 系统) 的研究始于 Smale [69] 构造非平凡的基本集. 随后 Shub [68] 和 Franks [18] 对幂零流形上的扩张映射与 Anosov 微分同胚的同伦类给出了半共轭意义下的分类. 1978 年, Mañé [46] 在 3- 维环面上构造了部分双曲的 DA 微分同胚, 从而给出了持续传递的但非一致双曲的例子. 时至今日, Mañé 构造的这类 DA 系统的动力学行为已有广泛的研究和丰富的结果, 例如其中心子丛的可积性与叶共轭的存在性 [9, 35, 55]、中心 Lyapunov 指数的刚性与可变性 [10, 19, 53]、最大熵测度的唯一性 [15, 71]、遍历性 [19, 37] 和 Bernoulli 性质 [54] 等.

本小节介绍具备一维中心子丛的部分双曲 DA 微分同胚的刚性. 首先考虑 3- 维流形的情形. 注意到, 能支撑 DA 微分同胚的 3- 维流形只能是 3- 维环面 $\mathbb{T}^3$ [18, 48, 50].

定理 2.1[19] 设 $f:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 为 $C^{1+\alpha}$- 光滑的、保体积的微分同胚, 具备部分双曲分解 $T\mathbb{T}^3=E^s_f\oplus E^c_f\oplus E^u_f$. 如果 f 的线性化 $A:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 为双曲自同构, 则下列两条性质等价:

(1) f 的稳定子丛 E^s_f 与不稳定子丛 E^u_f 联合可积;

(2) f 的任意周期点处的中心 Lyapunov 指数与 A 的相等.

特别地, 以上两条均蕴涵着 f 是一个 Anosov 微分同胚.

Hammerlindl 和 Ures[37] 证明了, 对于定理 2.1 中的系统 f, 如果它不遍历 (关于体积测度), 则它是 su- 可积的. 结合该结果与定理 2.1, 我们得到如下推论. 特别地, 这回答了 Rodriguez Hertz 等[63,64] 提出的遍历性猜测的 $\mathbb{T}^3$ 情形.

推论 2.1[19,37] 闭的 3- 维 Riemann 流形上任意一个 $C^{1+\alpha}$- 光滑的、保体积的、部分双曲的 DA 微分同胚都是遍历的.

尽管 3- 维流形上部分双曲的 DA 微分同胚的研究已日趋深入, 但其拓扑传递性依然是一个公开问题. 有部分证据[8,73] 表明, su- 可达性在一定程度上能反应部分双曲系统的传递性. 下面这个二分结果表明 $\mathbb{T}^3$ 上非双曲的部分双曲 DA 微分同胚总是 su- 可达的. 特别地, 这证明了 Mañé[46] 构造的持续传递非双曲的例子是 su- 可达的.

定理 2.2[36] 设 $f:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 为 $C^{1+\alpha}$- 光滑的部分双曲微分同胚, 且同伦于双曲自同构 $A:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$, 则下列二分成立:

- 要么, f 是可达的;
- 要么, f 是 Anosov 微分同胚, 且其任意周期点处的中心 Lyapunov 指数与 A 的相等.

注意到, 环面上的 Anosov 微分同胚总是传递的. 因此结合定理 2.2 与文献 [8] 的结果, 我们得到如下推论.

推论 2.2[8,36] 设 $f:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 为 $C^{1+\alpha}$- 光滑的、部分双曲的 DA 微分同胚. 如果其非游荡集为整个环面 $\mathbb{T}^3$, 则 f 是拓扑传递的.

如引言中所介绍的, Lyapunov 指数是刻画 Anosov 系统光滑共轭的重要指标之一 (参见文献 [12, 22,24–27,66]). 其中, 一项对于高维刚性研究具有启发性的结果是, Gogolev 和 Guysinsky[25] 利用周期点处中心 Lyapunov 指数相等这一条件, 证明了 $\mathbb{T}^3$ 上两个 Anosov 系统的拓扑共轭保持三族 1- 维的叶状结构. 受定理 2.1 和 2.2 的启发, 我们也考虑了前述文献 [25] 结果的反问题, 得到如下等价刻画. 记 $\mathrm{Per}(f)$ 为映射 f 的所有周期点所构成的集合.

定理 2.3[25,75] 设 $f,g:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 为 $C^{1+\alpha}$- 光滑的 Anosov 微分同胚, 分别具有部分双曲分解 $T\mathbb{T}^3=E^{ss}_f\oplus E^{ws}_f\oplus E^u_f$ 与 $T\mathbb{T}^3=E^{ss}_g\oplus E^{ws}_g\oplus E^u_g$, 其中 $E^{ss}_{f/g}$ 与 $E^{ws}_{f/g}$ 分别被称为强稳定子丛与弱稳定子丛, 使得 $E^{ss}_f\oplus E^{ws}_f=E^s_f, E^{ss}_g\oplus E^{ws}_g=E^s_g$. 如果 f 与 g 通过同胚 $h:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$ 共轭, 则下列两条性质等价:

(1) h 将 f 的强稳定流形 $\mathcal{F}^{ss}_f$ 映射为 g 的强稳定流形 $\mathcal{F}^{ss}_g$;

(2) f 与 g 对应周期点处的中心 Lyapunov 指数相等, 即 $\lambda^{ws}(p,f)=\lambda^{ws}(h(p),g), \forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$.

特别地, 以上两条均蕴涵拓扑共轭 h 沿着弱稳定流形是 C^1- 光滑的.

注 2.1 注意到, $\mathbb{T}^3$ 上部分双曲的 Anosov 微分同胚的一维子丛均是可积的, 且拓扑共轭将中心流形映为中心流形[55]. 当 g 为 f 的线性化 A 时, h 将 f 的强稳定流形映射为 A 的强稳定流形当且仅当 E^{ss}_f 与 E^u_f 联合可积[19,37]. 因此, 定理 2.1 的 Anosov 情形可以视为定理 2.3 的一个特例.

在本小节的最后, 我们给出定理 2.1 的在高维环面 $\mathbb{T}^d$ $(d\geqslant 4)$ 时具有一维中心子丛的类似版本.

设双曲自同构 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ $(d\geqslant 4)$ 具有中心一维的部分双曲分解

$$T\mathbb{T}^d=L^s\oplus L^c\oplus L^u,$$

其中 $\dim L^c=1$. 记集合 $\mathbf{PH}_A$ 为同伦于 A 且具有相同维数部分双曲分解的微分同胚的集, 即

$$\mathbf{PH}_A=\{f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d\mid f \text{ 同伦于 } A,\dim E^s_f=\dim L^s,\dim E^u_f=\dim L^u,\text{且 }\dim E^c_f=\dim L^c=1\}.$$

记 $\mathbf{PH}^0_A$ 为集合 $\mathbf{PH}_A$ 中包含中心子丛可积的映射的连通分支的并集. 注意到 $\mathbf{PH}^0_A$ 中的映射 f 具有中心叶状结构 $\mathcal{F}^c_f$ [15], 且存在 f 与 A 之间中心流形的叶共轭 $h_c:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$, 即同胚 h_c 满足

$$h_c(\mathcal{F}^c_f(x))=\mathcal{L}^c(h_c(x))\quad \text{且}\quad h_c\circ f(\mathcal{F}^c_f(x))=A\circ h_c(\mathcal{F}^c_f(x)).$$

这对于我们的技术是至关重要的.

称环面上的局部微分同胚 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 是不可约的, 如果由 f 诱导的、在基本群 $\pi_1(\mathbb{T}^d)$ 上的自同态 f_* 所对应的矩阵的特征多项式在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的.

定理 2.4 设不可约的双曲自同构 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ $(d\geqslant 4)$ 具有中心一维的部分双曲分解, 则 $\mathbf{PH}^0_A$ 中任意一个 $C^{1+\alpha}$- 光滑的、保体积的微分同胚 f 是遍历的. 进一步地, 下列两条性质等价:

- f 的稳定子丛 E^s_f 与不稳定子丛 E^u_f 联合可积;
- f 的任意周期点处的中心 Lyapunov 指数与 A 的相等.

特别地, 以上两条均蕴涵着 f 是一个 Anosov 微分同胚.

定理 2.4 的证明方法与定理 2.1 以及文献 [37] 中主要定理的方法类似, 附录中给出其证明概要. 值得一提的是, 定理 2.2 的证明依赖于系统的维数 (参见文献 [36, 命题 3.6] 和 [71, 定理 5.1, 问题 5.3]). 尽管可以考虑 $\dim E^s_f=\dim L^s=1$ 或者 $\dim E^u_f=\dim L^u=1$ 的情形以适配文献 [36] 中的方法, 但是我们不再赘述这种情形下高维版本的定理 2.2.

2.2 具备高维中心丛的双曲系统

本小节介绍具有多于 3 个不变子丛的环面 Anosov 微分同胚的子丛联合可积的刚性现象. 一般地, 考虑 C^2- 光滑的 Anosov 微分同胚 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 具有控制分解

$$T\mathbb{T}^d=E^{ss}\oplus E^{ws}\oplus E^{wu}\oplus E^{uu},$$

其中 $E^s=E^{ss}\oplus E^{ws}$, $E^u=E^{wu}\oplus E^{uu}$. 对于双曲线性系统的小扰动而言, 其相邻子丛总是联合可积的 (参见文献 [38]). 因此, 本小节仅聚焦于 “间隔” 子丛的联合可积性, 考虑如下两种联合可积的情形:

(1) $E^{ss}\oplus E^u$ 可积 (对称地, $E^{uu}\oplus E^s$ 可积);

(2) $E^{ss}\oplus E^{uu}$ 可积.

我们也期待其余 “间隔” 子丛联合可积的刚性现象, 但相关的问题尚有待研究.

设 $A\in\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 诱导 d- 维环面自同构 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$, 设 $L\subset T\mathbb{T}^d$ 为 A- 不变的子丛. 称 A- 不变的子丛分解

$$L=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_m$$

为 $A|_L$ 的最细控制分解, 如果该分解满足如下条件:

(1) 对任意的 $i=1,\dots,m$, 若 μ_i 与 μ_i' 均为 $A|_{L_i}$ 的特征值, 则 $|\mu_i|=|\mu_i'|$;

(2) 对任意的 $i=1,\dots,m-1$, 若 μ_i 与 μ_{i+1} 分别为 $A|_{L_i}$ 与 $A|_{L_{i+1}}$ 的特征值, 则 $|\mu_i|<|\mu_{i+1}|$. 特别地, 当 $L=T\mathbb{T}^d$ 时, 称该分解为 A 的最细控制分解.

首先, 考虑前述的第一类联合可积的情形, 即最强的稳定子丛与整个不稳定子丛的联合可积性. 值得一提的是, 在此情形下, 我们考虑 "全局的" 刚性结果, 即 f 不必是其线性化的小扰动.

定理 2.5 [30] 设 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 为 C^2- 光滑的、不可约的 Anosov 微分同胚, 具备绝对部分双曲分解 $\mathbb{T}^d=E^{ss}\oplus E^{ws}\oplus E^u$. 如果 $E^{ss}\oplus E^u$ 联合可积, 则其线性化 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 也有维数一致的部分双曲分解

$$T\mathbb{T}^d=L^{ss}\oplus L^{ws}\oplus L^u,\quad \dim L^\sigma=\dim E^\sigma,\quad \sigma=ss,ws,u.$$

若 f 进一步地满足条件

$$\|Df|_{E^{ws}(x)}\|<m(Df|_{E^{ws}(x)})\cdot m(Df|_{E^u(x)}),\quad \forall\, x\in\mathbb{T}^d,$$

则下列两条性质成立:

(1) f 限制在子丛 E^{ws} 上也具有与 $A|_{L^{ws}}$ 的最细控制分解维数一致的控制分解

$$E^{ws}=E_1^{ws}\oplus\cdots\oplus E_k^{ws},\quad \dim E_i^{ws}=\dim L_i^{ws},\quad i=1,\dots,k;$$

(2) 对于任意 $i=1,\dots,k$, f 有 E_i^{ws}- 谱刚性, 即对每一个遍历测度, f 在子丛 E_i^{ws} 上的 Lyapunov 指数相等, 并且

$$\lambda_i^{ws}(f)=\lambda_i^{ws}(A),\quad \forall\, i=1,\dots,k.$$

特别地, 对于余一维的 Anosov 微分同胚, 我们有如下的推论.

推论 2.3 [30] 设 C^2- 光滑的 Anosov 微分同胚 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 具有绝对部分双曲分解

$$T\mathbb{T}^d=E^{ss}\oplus E^{ws}\oplus E^u,\quad 其中\ \dim E^{ss}=\dim E^u=1.$$

若 f 的线性化 A 的特征值均是实数, 则下列两条性质等价:

- $E^{ss}\oplus E^u$ 联合可积, 且 f 的每个周期点在子丛 E^{ss} 与 E^u 上的 Lyapunov 指数分别与 A 对应子丛的 Lyapunov 指数相等;
- 存在 $0<\beta<1$ 使得 f 能 $C^{1+\beta}$- 光滑地共轭于 A.

下面考虑通有矩阵的小扰动. 在此情形下, 我们进一步刻画第一类联合可积性: 最强稳定子丛与整个不稳定子丛的联合可积性等价于 "相对弱的" 稳定子丛与整个不稳定子丛的联合可积性 (见定理 2.6 的前两条性质). 称矩阵 $A\in\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 是通有的, 如果 A 是双曲的、不可约的, 任意 3 个特征值的模不相等, 并且两个特征值如果有相等的模则是一对共轭复根. 文献 [26] 证明了 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 中 "多数" 矩阵是通有的, 即随着矩阵范数上界的限制趋于无穷, 通有的矩阵在 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 中的占比趋于 1. 注意到, 通有矩阵 A 的最细控制分解

$$T\mathbb{T}^d=L_1^s\oplus\cdots\oplus L_k^s\oplus L_1^u\oplus\cdots\oplus L_l^u$$

满足, 对于任意 i 有 $\dim L_i^{s/u}\leqslant 2$. 另外, 当微分同胚 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 充分地 C^1- 接近 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 时, f 是一致双曲的, 并且具有与 A 最细控制分解维数一致的控制分解:

$$T\mathbb{T}^d=E_1^s\oplus\cdots\oplus E_k^s\oplus E_1^u\oplus\cdots\oplus E_l^u.$$

对任意的 $k\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant k$, 记 $E^s_{(1,i)}=E_1^s\oplus\cdots\oplus E_i^s$.

定理 2.6 [30] 设 $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 是通有的矩阵诱导环面自同构 $A:\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$. 设 C^2- 光滑的微分同胚 $f:\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 充分地 C^1- 接近于 A 使得其具有与 A 最细控制分解维数一致的控制分解

$$T\mathbb{T}^d = E_1^s \oplus \cdots \oplus E_k^s \oplus E_1^u \oplus \cdots \oplus E_l^u.$$

则对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有下列 4 条性质等价:

(1) 子丛 $E^s_{(1,i)} \oplus E^u$ 联合可积;

(2) 子丛 $E_i^s \oplus E^u$ 联合可积;

(3) 对于任意 $j = i+1,\dots,k$, f 有 E_j^s- 谱刚性, 即对每一个遍历测度, f 在子丛 E_j^s 上的 Lyapunov 指数相等, 并且

$$\lambda_j^s(f) = \lambda_j^s(A), \quad \forall\, j = i+1,\dots,k;$$

(4) 存在 $0<\beta<1$ 使得 f 与 A 之间的拓扑共轭 $h:\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 沿着 E_j^s 方向是 $C^{1+\beta}$- 光滑的, 并且 $Dh(E_j^s) = L_j^s, \forall\, j = i+1,\dots,k$.

最后考虑前述的第二类联合可积的情形, 即强稳定子丛与强不稳定子丛的联合可积性. 在此情形下, 我们本质上仅考虑弱稳定子丛与弱不稳定子丛均为 1- 维的情形. 特别地, 对于具有复特征值的 2- 维弱子丛的情形, 也有相关结果 (参见文献 [30, 定理 1.6]).

定理 2.7 [30] 令矩阵 $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 诱导环面不可约的双曲自同构, 且具有控制分解 $T\mathbb{T}^d = L^{ss} \oplus L^{ws} \oplus L^{wu} \oplus L^{uu}$, 其中 $\dim L^{ws} = \dim L^{wu} = 1$. 设 C^2- 光滑的微分同胚 $f:\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 充分地 C^1- 接近 A, 使得 f 有维数一致的控制分解 $T\mathbb{T}^d = E^{ss} \oplus E^{ws} \oplus E^{wu} \oplus E^{uu}$. 则有下列两条性质等价:

(1) $E^{ss} \oplus E^{uu}$ 联合可积;

(2) f 有 $E^{ws} \oplus E^{wu}$- 谱刚性, 即对每一个遍历测度, f 在子丛 $E^{ws/wu}$ 上的 Lyapunov 指数相等, 并且 $\lambda^\sigma(f) = \lambda^\sigma(A)$, 其中 $\sigma = ws, wu$.

特别地, 将定理 2.7 应用于 4- 维环面上保辛形式的系统 f, 我们得到如下推论.

推论 2.4 [30] 设 $A \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$ 为不可约的、双曲的辛矩阵, 且其诱导的环面自同态 $A:\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 具有控制分解 $T\mathbb{T}^4 = L^{ss} \oplus L^{ws} \oplus L^{wu} \oplus L^{uu}$. 设 C^2- 光滑的辛同胚 $f:\mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ 充分地 C^1- 接近 A 使得 f 有控制分解 $T\mathbb{T}^4 = E^{ss} \oplus E^{ws} \oplus E^{wu} \oplus E^{uu}$. 则有下列两条性质等价:

(1) $E^{ss} \oplus E^{uu}$ 联合可积;

(2) 存在 $0<\beta<1$ 使得 f 能 $C^{1+\beta}$- 光滑地共轭于 A.

3 Anosov 可微映射的刚性

本节旨在考虑不可逆的双曲系统的刚性问题. 在 20 世纪 70 年代, Mañé 和 Pugh[47] 及 Przytycki[56] 先后证明了不可逆的、非扩张的一致双曲系统没有 "局部的" 与 "整体的" 结构稳定性, 即这类系统总存在任意小的扰动不再拓扑共轭于原系统, 这里 "局部的" 是指拓扑共轭 C^0- 接近于恒同映射, "整体的" 是指任意的拓扑共轭. 随后的二十年发展中, 在 Aoki 和 Hiraide[3] 工作的基础上, Sumi[70] 证明了 d- 维环面上的一致双曲系统能共轭至其线性化, 当且仅当该系统具有不稳定子丛.

首先从稳定子丛的 Lyapunov 指数的角度来刻画具有不稳定子丛的、不可逆的双曲系统, 进而用稳定子丛的 Lyapunov 指数的特征给出这类系统 (不一定具备不稳定子丛) 拓扑共轭的条件. 这将揭示不可逆系统独特的刚性现象: 拓扑共轭自动具有光滑的方向. 在此研究的基础上, 本节进一步探究了不可逆双曲系统的同伦类的半共轭的刚性现象.

3.1 不稳定子丛的存在性

如注 1.2 所述, 不可逆的双曲系统不一定存在 (不变的) 不稳定子丛. 这样的例子并不鲜见, 例如, Mañé 和 Pugh [47] 在证明不可逆双曲系统的非结构稳定性时的扰动方法: 对原系统沿着稳定流形方向扰动, 即可破坏不稳定子丛的存在性. 更为极端的例子是, Przytycki [56] 对 3- 维环面上不可逆的双曲线性系统

$$A=\begin{bmatrix} n & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & n\end{bmatrix}:\mathbb{T}^3\to\mathbb{T}^3$$

(其中 n 充分大) 作适当的 C^1- 小扰动, 使得扰动后的系统在某点处具有无穷多个 2- 维的不稳定方向, 并且这些不稳定方向的集包含了 2- 维 Grassmann 流形中的一条曲线. 事实上, Przytycki 例子这一现象并不罕见, 例如, Micena 和 Tahzibi [49] 证明了, 对于任意一个拓扑传递的、不具有不稳定子丛的 Anosov 可微映射, 其具有无穷多个不稳定方向的点构成了流形上的一个剩余集. 结合下文的推论 3.3, 可知 Micena 和 Tahzibi 给出的这一类系统, 在 2- 维环面上不可逆双曲系统的集中是 C^1- 开且 C^∞- 稠密的.

本小节从稳定子丛的 Lyapunov 指数这一角度来刻画不稳定子丛的存在性. 对于稳定子丛是 1- 维的情形, 我们给出了 "整体的" 结果; 对于稳定子丛是高维的情形, 我们给出了 "局部的" 结果. 这里的 "局部" 与 "整体" 分别指被考虑的系统是否为线性系统的小扰动.

首先考虑幂零流形上, 具备一维稳定子丛的、不可逆的 Anosov 可微映射. 值得一提的是, 与环面情形相比 (见推论 3.2), 非平凡的幂零流形 $M=N/\Gamma$ (即 M 不同胚于环面) 情形有着本质困难. 对于环面情形, 我们要求映射是不可逆且不可约的, 这两个条件是必要的 (参见文献 [1]). 对于非平凡的幂零流形的情形, 我们需要自同态 $A:M\to M$ 满足如下两个条件.

• 自同态 $A:M\to M$ 是完全不可逆的, 即 A 的任意特征值都不是代数单位. 称一个代数整数 a 是代数单位, 如果它的倒数 $1/a$ 也是代数整数. 简要而言, A 完全不可逆是指 A 没有可逆的因子.

• 自同态 $A:M\to M$ 是水平不可约的, 即 A 诱导的环面自同态 $A_1:M_1\to M_1$ 是不可约的, 这里 $M_1=N/[N,N]\Gamma$ 被称为 M 的水平环面.

定理 3.1 [1, 31] 设 $f:M\to M$ 是幂零流形 M 上 C^{r+1}- 光滑的 ($r>0$) Anosov 可微映射, 且具有一维的稳定子丛. 令 $A:M\to M$ 为 f 的线性化. 如果 A 是完全不可逆且水平不可约的, 则下列 5 条性质等价:

(1) f 具有不稳定子丛;

(2) f 拓扑共轭于 A;

(3) f 的每个周期点的稳定方向的 Lyapunov 指数相等;

(4) f 的每个周期点的稳定方向的 Lyapunov 指数均与 A 的相等;

(5) f 具有 C^{r_*}- 光滑的不稳定子丛.

进一步地, 以上 5 条均蕴涵着 f 与 A 之间的拓扑共轭沿着稳定叶片是 C^{r+1}- 光滑的.

注 3.1 这里对定理 3.1 中的光滑性作一些注解. 一方面, "$1\Longleftrightarrow 2\Longrightarrow 3\Longrightarrow 4$" 的证明仅需要 f 是 C^1- 光滑的, 即定理 3.1 中的 r 可以等于 0; 另一方面, 受限于 Livschitz 定理 [43], "$4\Longrightarrow 1$" 需要 f 的导算子至少是 Hölder 连续的. 最后, 在性质 (5) 中, 不稳定子丛光滑性的损失来源于 Journé [40] 引理以及叶状结构与其对应子丛在光滑性上的自然关系.

注 3.2 这里简要说明定理 3.1 中条件 "完全不可逆" 和 "水平不可约" 的必要性.

• "$1 \iff 2$" 和 "$3 \iff 4$" 的证明不需要这两个条件. 但是对于高维稳定子丛的情形, "$1 \implies 2$" 的证明需要额外要求 f 是 u- 理想的, 即其万有覆叠 N 上的双曲分解 $\mathrm{Lie}(N) = \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^s \oplus \mathfrak{n}^u$ 满足 $[\mathfrak{n}^s, \mathfrak{n}^u] \subseteq \mathfrak{n}^u$.

• "$2 \implies 3$" 的证明需要 A 是完全不可逆的. 此时 f 具有原像指数稠密性, 即存在常数 $C > 1$ 与 $0 < \mu < 1$, 使得任意一点 $x \in M$ 的 k- 步 $(k \in \mathbb{N})$ 原像集 $f^{-k}(x)$ 在 M 中是 $C\mu^k$- 稠密的. 当 A 存在可逆因子时, 有明显的反例, 如双曲自同构与扩张自同态的乘积, 具体反例参见文献 [1, 引言].

• "$3 \implies 2$" 的证明需要 A 是水平不可约的. 此时 f 的稳定叶状结构是极小的, 即任意一条稳定流形在 M 中是稠密的. 当 A 具有可约的水平环面因子系统时, 也有反例说明 "$3 \implies 2$" 是不成立的, 具体反例参见文献 [1, 命题 2.22].

• "$1 \implies 5$" 的证明需要 A 是完全不可逆的, "$5 \implies 1$" 是平凡的.

当 M 是 3- 维幂零流形且非平凡 (即 $M \ncong \mathbb{T}^3$) 时, 其上的 Anosov 映射 f 自动满足定理 3.1 中的假设, 即 $\mathrm{dim}E^s_f = 1$, f 的线性化是完全不可逆且水平不可约的. 由此, 有如下推论.

推论 3.1 [31] 设 $f : M \to M$ 是 3- 维幂零流形 M 上 C^{r+1}- 光滑的 $(r > 0)$ Anosov 可微映射. 如果 M 非平凡, 则定理 3.1 的结论成立.

当 M 是 d- 维环面时, 定理 3.1 的完全不可逆与水平不可约的假设可以约化为不可逆与不可约. 由此, 有如下推论.

推论 3.2 [1] 设 $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ $(d \geqslant 2)$ 是 C^{r+1}- 光滑的 $(r > 0)$ Anosov 可微映射, 具有一维的稳定子丛. 如果 f 不可逆且不可约, 则定理 3.1 的结论成立.

当 M 是 2- 维环面时, 定理 3.1 只需要 f 是不可逆的. 特别地, 当 f 是扩张映射时, 其稳定子丛退化, 定理 3.1 自动成立.

推论 3.3 [1] 设 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 是 C^{r+1}- 光滑的 $(r > 0)$ Anosov 可微映射. 如果 f 不可逆, 则定理 3.1 的结论成立.

下面考虑具有高维稳定子丛的情形. 受限于一些技术难点, 如幂零情形下的稳定叶状结构未必具有拟等距性质 [31] (拟等距性质的定义参见命题 A.1)、Livschitz 定理的高维上闭链 (cocycle) 形式 (如双曲自同构情形 [41]) 在不可逆双曲系统情形的缺失, 我们只考虑环面上稳定子丛具有实单谱的双曲线性系统的小扰动.

设 $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 为双曲矩阵, 称 A 的稳定子丛具有实单谱, 如果它在稳定子丛上的特征值均为实数且模长两两不同. 注意到, 此时 A 在环面 $\mathbb{T}^d$ 上诱导的双曲自同态, 具有如下的控制分解:

$$T\mathbb{T}^d = L^s_1 \oplus \cdots \oplus L^s_k \oplus E^u,$$

其中 $L^s_1 \oplus \cdots \oplus L^s_k$ 为稳定子丛 L^s, 且对任意的 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $\mathrm{dim}E^s_i = 1$. 设 f 为 d- 维环面上的局部微分同胚且 C^1- 接近于 A, 此时 f 是双曲的, 并且其稳定子丛上的 Lyapunov 指数满足

$$\lambda^s_1(p, f) < \lambda^s_2(p, f) < \cdots < \lambda^s_k(p, f) < 0, \quad \forall\, p \in \mathrm{Per}(f).$$

称数组 $(\lambda^s_1(p, f), \lambda^s_2(p, f), \dots, \lambda^s_k(p, f))$ 为 f 在点 p 处稳定子丛上的 Lyapunov 谱. 称 f 具有稳定子丛的谱刚性, 如果对任意周期点 $p \in \mathrm{Per}(f)$ 有

$$\lambda^s_i(p, f) = \log|\mu_i|, \quad i = 1, \dots, k,$$

其中 μ_i 为 A 对应于子丛 L^s_i 的特征值.

定理 3.2 [1] 设 $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 为不可约的双曲矩阵且其稳定子丛具有实单谱. 若 A 诱导 d- 维环面上不可逆的自同态 $A: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, 则对于任意一个 C^1- 接近于 A、$C^{1+\alpha}$- 光滑的 $(0 < \alpha < 1)$ 局部微分同胚 $f: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, 有下列 5 条性质等价:

(1) f 具有不稳定子丛;

(2) f 拓扑共轭于 A;

(3) f 的每个周期点的稳定子丛上的 Lyapunov 谱相等;

(4) f 具有稳定子丛的谱刚性;

(5) 存在 $0 < \beta \leqslant \alpha$ 使得 f 具有 $C^{1+\beta}$- 光滑的不稳定子丛.

进一步地, 以上 5 条均蕴涵着, 存在 $0 < \beta \leqslant \alpha$ 使得 f 与 A 之间的拓扑共轭沿着稳定流形是 $C^{1+\beta}$- 光滑的.

3.2 双曲系统的共轭分类

在上一小节, 通过稳定子丛的 Lyapunov 指数给出了环面上一部分不可逆 Anosov 系统拓扑共轭于其线性化的充要条件. 本小节进一步考虑环面上任意两个同伦的 Anosov 系统 (不一定具有不稳定子丛), 尝试使用稳定子丛的 Lyapunov 指数给出其拓扑共轭的判别法.

首先, 我们需要下如下引理, 从而给出两个同伦 Anosov 系统周期点集之间的自然对应方式.

引理 3.1 [32] 设 $f: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 为 Anosov 可微映射, $\dim E_f^s = 1$. 令 $A: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 为 f 的线性化. 则 f 与 A 叶共轭, 即存在同胚 $h_s: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 同伦于恒同映射 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$, 使得对任意 $x \in \mathbb{T}^d$ 有

$$h_s(\mathcal{F}_f^s(x)) = \mathcal{L}^s(h_s(x)) \quad \text{且} \quad h_s \circ f(\mathcal{F}_f^s(x)) = A \circ h_s(\mathcal{F}_f^s(x)).$$

利用叶共轭 h_s 保持周期稳定流形以及 f 与 A 限制于其稳定流形上的压缩性, 易知 h_s 诱导了 f 与 A 的周期点集之间的一一对应, 即存在双射

$$h_s^{\mathrm{P}}: \mathrm{Per}(f) \to \mathrm{Per}(A).$$

定理 3.3 [32] 设 $f, g: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 为两个同伦的、C^r- 光滑的 $(r > 1)$、不可约的、不可逆的 Anosov 可微映射, 且具有一维的稳定子丛. 则下列 3 条性质等价:

(1) f 与 g 之间的叶共轭 h_s 满足 $\lambda^s(p, f) = \lambda^s(h_s^{\mathrm{P}}(p), g), \forall p \in \mathrm{Per}(f)$;

(2) f 与 g 拓扑共轭;

(3) 存在 f 与 g 的拓扑共轭 h 满足 $\lambda^s(p, f) = \lambda^s(h(p), g), \forall p \in \mathrm{Per}(f)$.

特别地, 如果存在 f 与 g 的拓扑共轭 h, 则 h 沿着稳定流形自动是 C^r- 光滑的.

特别地, 对于 2- 维环面上不可逆的 Anosov 可微映射, 有如下推论.

推论 3.4 [32] 设 $f, g: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为两个同伦的、C^r- 光滑的 $(r > 1)$ Anosov 可微映射. 如果 f 不可逆, 则定理 3.3 的结论成立.

进一步地, 我们得到了如下的 Jacobi 刚性结果. 记可微映射 f 在点 x 处导算子的 Jacobi 为 $\mathrm{Jac}(f)(x)$, 即 $\mathrm{Jac}(f)(x) = |\det(D_x f)|$.

定理 3.4 [32] 设 $f, g: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为两个 C^r- 光滑的 $(r > 1)$、不可逆的 Anosov 可微映射. 如果存在 f 与 g 之间的拓扑共轭 h 使得

$$\mathrm{Jac}(f^n)(p) = \mathrm{Jac}(g^n)(h(p)), \quad \forall p \in \mathrm{Per}(f),$$

则 h 是 C^{r_*}- 光滑的微分同胚.

3.3 同伦类的半共轭刚性

Franks[18] 和 Shub[68] 在 20 世纪六七十年代分别给出了环面双曲微分同胚的同伦类与环面扩张映射的同伦类的完整刻画, 即这类系统总能半共轭至其线性化. Franks[18] 强调了他的方法不适用于不可逆的情形, 并提问: 一个不可逆的、非扩张的双曲系统的同伦类是否能半共轭至其本身. 2023 年在波兰举办的 Beyond Uniform Hyperbolicity 会议上, 基于本文中不可逆双曲系统的拓扑共轭刚性的结果, Buzzi 再次提出半共轭存在性这一问题. 本小节对这一问题给出否定的回答, 并进一步探讨存在半共轭导致的刚性现象.

对于具备一致扩张方向的 DA 系统, 有如下的半共轭刚性结果.

定理 3.5[33] 设 $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 为 C^{r+1}- 光滑的 $(r>0)$、不可逆的 cu- 部分双曲映射. 如果其线性化 $A:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 是双曲自同态, 则下列 5 条性质等价:

(1) 存在 f 到 A 的半共轭 $h:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$;

(2) 存在 f 到 A 的共轭 $h:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$;

(3) f 是 Anosov 可微映射, 且 $\lambda^s(p,f)=\lambda^s(A), \forall\, p\in \mathrm{Per}(f)$;

(4) f 具有不稳定子丛;

(5) f 具有 C^{r_*}- 光滑的不稳定子丛.

特别地, 如果存在 f 到 A 的拓扑半共轭 h, 则 h 是同胚, 且沿着稳定流形自动是 C^{r+1}- 光滑的.

对于具备一致压缩方向的 DA 系统, 有如下的结果.

定理 3.6[33] 设 $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 为 C^1- 光滑的、不可逆的 sc- 部分双曲映射. 如果其线性化 $A:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 是双曲自同态, 则存在 f 到 A 的半共轭当且仅当 f 具有中心子丛. 进一步地, 如果半共轭 h 存在, 则其单射点集的闭包

$$\Lambda := \overline{\{x\in\mathbb{T}^2 \mid h^{-1}\circ h(x)=\{x\}\}}$$

是 f- 不变集, 且满足下列两条性质:

(1) $\overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)}=\Lambda$;

(2) $\lambda^s(p,f)=\lambda^s(A), \forall\, p\in\mathrm{Per}(f|_\Lambda)$.

注 3.3 对于 sc-DA 系统, 我们不能期待定理 3.5 成立. 事实上, 文献 [33] 构造了反例: 存在 C^∞-光滑的、不可逆的 sc-DA 系统半共轭 (但不共轭) 至其线性化系统. 特别地, 文献 [33] 也指出, 定理 3.5 对保体积的 sc-DA 系统仍然成立.

问题 3.1 设定理 3.6 中的半共轭 h 存在, 则 h 限制在 Λ 中的每条稳定流形上是否是光滑的? 注意到定理 3.6 中的不变集 Λ 包含了整条稳定流形, 即 Λ 具有稳定流形饱和 (saturated) 性质.

参考文献

1 An J, Gan S, Gu R, et al. Rigidity of stable Lyapunov exponents and integrability for Anosov maps. Comm Math Phys, 2023, 402: 2831–2877

2 Anosov D V. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. Trudy Mat Inst Steklov, 1967, 90: 209

3 Aoki N, Hiraide K. Topological Theory of Dynamical Systems. Recent Advances North-Holland Mathematical Library, vol. 52. Amsterdam: North-Holland, 1994

4 Avila A, Viana M. Extremal Lyapunov exponents: An invariance principle and applications. Invent Math, 2010, 181: 115–178

5 Avila A, Viana M, Wilkinson A. Absolute continuity, Lyapunov exponents and rigidity I: Geodesic flows. J Eur Math Soc (JEMS), 2015, 17: 1435–1462

6 Avila A, Viana M, Wilkinson A. Absolute continuity, Lyapunov exponents, and rigidity II: Systems with compact center leaves. Ergodic Theory Dynam Systems, 2022, 42: 437–490

7 Benoist Y, Foulon P, Labourie F. Anosov flows with stable and unstable differentiable distributions. J Amer Math Soc, 1992, 5: 33–74

8 Brin M. Topological transitivity of a certain class of dynamical systems, and flows of frames on manifolds of negative curvature. Funktsional Anal i Prilozhen, 1975, 9: 9–19

9 Brin M, Burago D, Ivanov S. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus. J Mod Dyn, 2009, 3: 1–11

10 Carrasco P D, Saghin R. Extended flexibility of Lyapunov exponents for Anosov diffeomorphisms. Trans Amer Math Soc, 2022, 375: 3411–3449

11 Cassels J W S. An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 99. New York: Cambridge Univ Press, 1957

12 de la Llave R. Smooth conjugacy and S-R-B measures for uniformly and non-uniformly hyperbolic systems. Comm Math Phys, 1992, 150: 289–320

13 de la Llave R. Analytic regularity of solutions of Livsic's cohomology equation and some applications to analytic conjugacy of hyperbolic dynamical systems. Ergodic Theory Dynam Systems, 1997, 17: 649–662

14 de la Llave R, Marco J M, Moriyon R. Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livsic cohomology equation. Ann of Math (2), 1986, 123: 537–611

15 Fisher T, Potrie R, Sambarino M. Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov. Math Z, 2014, 278: 149–168

16 Flaminio L, Katok A. Rigidity of symplectic Anosov diffeomorphisms on low dimensional tori. Ergodic Theory Dynam Systems, 1991, 11: 427–441

17 Franks J. Anosov diffeomorphisms on tori. Trans Amer Math Soc, 1969, 145: 117–124

18 Franks J. Anosov diffeomorphisms. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XIV–XVI. Providence: Amer Math Soc, 1970, 61–93

19 Gan S, Shi Y. Rigidity of center Lyapunov exponents and su-integrability. Comment Math Helv, 2020, 95: 569–592

20 Ghys É. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. Ann Sci École Norm Sup, 1987, 20: 251–270

21 Ghys É. Rigidité différentiable des groupes fuchsiens. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1993, 78: 163–185

22 Gogolev A. Smooth conjugacy of Anosov diffeomorphisms on higher-dimensional tori. J Mod Dyn, 2008, 2: 645–700

23 Gogolev A. How typical are pathological foliations in partially hyperbolic dynamics: An example. Israel J Math, 2012, 187: 493–507

24 Gogolev A. Bootstrap for local rigidity of Anosov automorphisms on the 3-torus. Comm Math Phys, 2017, 352: 439–455

25 Gogolev A, Guysinsky M. C^1-differentiable conjugacy of Anosov diffeomorphisms on three dimensional torus. Discrete Contin Dyn Syst, 2008, 22: 183–200

26 Gogolev A, Kalinin B, Llave R, et al. Local rigidity for Anosov automorphisms. Math Res Lett, 2011, 18: 843–858

27 Gogolev A, Kalinin B, Sadovskaya V. Local rigidity of Lyapunov spectrum for toral automorphisms. Israel J Math, 2020, 238: 389–403

28 Gogolev A, Kalinin B, Sadovskaya V. Center foliation rigidity for partially hyperbolic toral diffeomorphisms. Math Ann, 2023, 387: 1579–1602

29 Gogolev A, Rodriguez Hertz F. Smooth rigidity for very non-algebraic expanding maps. J Eur Math Soc (JEMS), 2023, 25: 3289–3323

30 Gogolev A, Shi Y. Joint integrability and spectral rigidity for Anosov diffeomorphisms. Proc Lond Math Soc (3), 2023, 127: 1693–1748

31 Gu R, Li W. Rigidity of stable Lyapunov exponents for codimension one Anosov covering maps on nilmanifolds. arXiv:2404.04196, 2024

32 Gu R, Shi Y. Topological and smooth classification of Anosov maps on torus. arXiv:2212.11457, 2022

33 Gu R, Xia M. Semi-conjugacy rigidity for endomorphisms derived from Anosov on the 2-torus. arXiv:2311.12669, 2023

34 Guillemin V, Kazhdan D. On the cohomology of certain dynamical systems. Topology, 1980, 19: 291–299

35 Hammerlindl A. Leaf conjugacies on the torus. Ergodic Theory Dynam Systems, 2013, 33: 896–933

36 Hammerlindl A, Shi Y. Accessibility of derived-from-Anosov systems. Trans Amer Math Soc, 2021, 374: 2949–2966

37 Hammerlindl A, Ures R. Ergodicity and partial hyperbolicity on the 3-torus. Commun Contemp Math, 2014, 16: 1350038

38 Hirsch M W, Pugh C, Shub M. Invariant Manifolds. Lecture Notes in Mathematics, vol. 583. Berlin-New York:

Springer-Verlag, 1977
39 Hurder S, Katok A. Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1990, 72: 5–61
40 Journé J L. A regularity lemma for functions of several variables. Revista Mate Iberoam, 1988, 4: 187–193
41 Kalinin B, Sadovskaya V. Linear cocycles over hyperbolic systems and criteria of conformality. J Mod Dyn, 2010, 4: 419–441
42 Katok A, Kononenko A. Cocycles' stability for partially hyperbolic systems. Math Res Lett, 1996, 3: 191–210
43 Livšic A N. Homology properties of Y-systems. Math Z, 1971, 10: 758–763
44 Livšic A N. Cohomology of dynamical systems. Math USSR Izv, 1972, 6: 1278–1301
45 Livšic A N, Sinaǐ Ja G. Invariant measures that are compatible with smoothness for transitive C-systems. Dokl Akad Nauk SSSR, 1972, 207: 1039–1041
46 Mañé R. Contributions to the stability conjecture. Topology, 1978, 17: 383–396
47 Mañé R, Pugh C. Stability of endomorphisms. In: Dynamical Systems-Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics, vol. 468. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1975, 175–184
48 Manning A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. Amer J Math, 1974, 96: 422–429
49 Micena F, Tahzibi A. On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms. Fund Math, 2016, 235: 37–48
50 Newhouse S E. On codimension one Anosov diffeomorphisms. Amer J Math, 1970, 92: 761–770
51 Pesin Y B. Families of invariant manifolds that correspond to nonzero characteristic exponents. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1976, 40: 1332–1379, 1440
52 Pesin Y B. Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. Zürich: European Math Soc, 2004
53 Ponce G, Tahzibi A. Central Lyapunov exponent of partially hyperbolic diffeomorphisms of T3. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 3193–3205
54 Ponce G, Tahzibi A, Varão R. On the Bernoulli property for certain partially hyperbolic diffeomorphisms. Adv Math, 2018, 329: 329–360
55 Potrie R. Partial hyperbolicity and foliations in $\mathbb{T}^3$. J Mod Dyn, 2015, 9: 81–121
56 Przytycki F. Anosov endomorphisms. Studia Math, 1976, 58: 249–285
57 Pugh C, Shub M. Stable ergodicity and julienne quasi-conformality. J Eur Math Soc (JEMS), 2000, 2: 1–52
58 Pugh C, Shub M, Wilkinson A. Hölder foliations. Duke Math J, 1997, 86: 517–546
59 Pugh C, Shub M, Wilkinson A. Hölder foliations, revisited. J Mod Dyn, 2012, 6: 79–120
60 Ren Y, Gan S B, Zhang P F. Accessibility and homology bounded strong unstable foliation for Anosov diffeomorphisms on 3-torus. Acta Math Sin (Engl Ser), 2017, 33: 71–76
61 Rodriguez Hertz F. Stable ergodicity of certain linear automorphisms of the torus. Ann of Math (2), 2005, 162: 65–107
62 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M, Ures R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. Invent Math, 2008, 172: 353–381
63 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M, Ures R. Partial hyperbolicity and ergodicity in dimension three. J Mod Dyn, 2008, 2: 187–208
64 Rodriguez Hertz F, Rodriguez Hertz M, Ures R. Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds. J Mod Dyn, 2011, 5: 185–202
65 Ruelle D, Wilkinson A. Absolutely singular dynamical foliations. Comm Math Phys, 2001, 219: 481–487
66 Saghin R, Yang J. Lyapunov exponents and rigidity of Anosov automorphisms and skew products. Adv Math, 2019, 355: 106764
67 Sakai K. Anosov maps on closed topological manifolds. J Math Soc Japan, 1987, 39: 505–519
68 Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. Amer J Math, 1969, 91: 175–199
69 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc (NS), 1967, 73: 747–817
70 Sumi N. Linearization of expansive maps of tori. In: Dynamical Systems and Chaos, vol. 1. River Edge: World Sci Publ, 1995, 243–248
71 Ures R. Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part. Proc Amer Math Soc, 2012, 140: 1973–1985
72 Wen L. Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity. Graduate Studies in Mathematics, vol. 173. Providence: Amer Math Soc, 2016
73 Wilkinson A. Conservative partially hyperbolic dynamics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. 3. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 1816–1836

74 Wilkinson A. The cohomological equation for partially hyperbolic diffeomorphisms. In: Astérisque, no. 358. Paris: Soc Math France, 2013, 75–165

75 Yu D, Gu R. Rigidity of center Lyapunov exponents for Anosov diffeomorphisms on 3-torus. Proc Amer Math Soc, 2024, 152: 1019–1030

附录 A　中心一维的 DA 微分同胚

本附录给出定理 2.4 的证明概要. 设 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ $(d\geqslant 4)$ 为不可约的双曲自同构, 且具备部分双曲分解 $T\mathbb{T}^d=L^s\oplus L^c\oplus L^u$, 其中 $\dim L^c=1$. 不妨假设 $A|_{L^c}$ 是扩张的, 即 A 在子丛 L^c 方向的 Lyapunov 指数 $\lambda^c(A)$ 满足

$$\lambda^c(A)>0.$$

设 $f:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 为部分双曲微分同胚, 具有部分双曲分解 $T\mathbb{T}^d=E^s\oplus E^c\oplus E^u$ 使得 $\dim E^\sigma=\dim L^\sigma$ $(\sigma=s,c,u)$, 并且 f 同伦于 A. 进一步假设 $f\in\mathbf{PH}_A^0$, $C^{1+\alpha}$- 光滑并且保体积. 我们将证明如下结论:

(1) $E^s\oplus E^u$ 可积等价于 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(A), \forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$;

(2) 上述 (1) 中的任意一条性质蕴涵 f 是一个 Anosov 微分同胚;

(3) f 关于体积测度是遍历的.

首先, 给出在集合 $\mathbf{PH}_A^0$ 中的映射 f 的基本性质. 记

$$L^{cs}=L^s\oplus L^c,\quad L^{cu}=L^c\oplus L^u,\quad L^{su}=L^s\oplus L^u,$$

设环面 $\mathbb{T}^d$ 上切于子丛 L^σ $(\sigma=s,c,u,cs,cu,su)$ 的叶状结构为 $\mathcal{L}^\sigma$, 设 $\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma$ 为其在万有覆叠 $\mathbb{R}^d$ 上的提升. 类似地, 记

$$E^{cs}=E^s\oplus E^c,\quad E^{cu}=E^c\oplus E^u,\quad E^{su}=E^s\oplus E^u.$$

由文献 [15, 定理 A] 可知, 存在环面 $\mathbb{T}^d$ 上切于子丛 E^σ $(\sigma=s,c,u,cs,cu)$ 的叶状结构, 我们将其记为 $\mathcal{F}^\sigma$. 注意到 $E^s\oplus E^u$ 未必是可积的. 若 $E^s\oplus E^u$ 可积, 记 $\mathcal{F}^{su}$ 为切于它的叶状结构. 记 $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ 为 $\mathcal{F}^\sigma$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的提升.

另外, 由 Franks 半共轭 [18] 可知, 存在环面 $\mathbb{T}^d$ 上同伦于恒同映射 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$ 的连续满射

$$h:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d,$$

使得 $h\circ f=A\circ h$, 并且存在 f 与 h 的提升 $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 与 $H:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 以及常数 $C>0$, 使得

$$H\circ F=A\circ H,\quad \|H-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}\|_{C^0}<C,$$

这里, 依然用 $A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 表示 $A:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 的提升. 称 h 与 H 为半共轭.

命题 A.1　$\mathbb{R}^d$ 上的叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ $(\sigma=s,c,u,cs,cu)$ 满足下列几条性质.

(1) 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, $\widetilde{\mathcal{F}}^c$ 和 $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ 是拟等距的, 即存在常数 $a,b>0$, 使得对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma(x)$ $(\sigma=s,c,u)$ 有

$$d_{\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma}(x,y)\leqslant a\cdot d(x,y)+b,$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Euclid 度量, $d_{\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma}(\cdot,\cdot)$ 由 $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ 每条叶片上的 Riemann 度量诱导.

(2) 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^{cs}$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ 构成 $\mathbb{R}^d$ 上的全局乘积结构, 即对于任意的点 $x,y\in\mathbb{R}^d$, 叶片 $\widetilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^u(y)$ 相交于唯一一点. 类似地, 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^{cu}$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ 构成 $\mathbb{R}^d$ 上的全局乘积结构.

(3) 半共轭 H 保持叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ ($\sigma=s,c,cs,cu$), 即对于任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, 有 $H(\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma(x))=\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma(H(x))$.

(4) 半共轭 H 保持叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, 并且 H 限制在稳定流形上是同胚, 即对于任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, $H:\widetilde{\mathcal{F}}^s(x)\to\widetilde{\mathcal{L}}^s(H(x))$ 是同胚.

(5) 存在常数 C, 使得对于任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, 集合 $H^{-1}\circ H(x)$ 是一段紧的、长度不超过 C 的局部中心流形.

证明　由文献 [15, 命题 7.1] 的结论可得叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ 是拟等距的. 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^c$ 的拟等距性质可由如下两条性质推导:

• (参见文献 [15, 定理 B]) 存在同胚 $h_c:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 同伦于 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$, 使得 $h_c(\mathcal{F}^c)=\mathcal{L}^c$;

• (参见文献 [30, 引理 2.2]) 环面上同胚 (同伦于恒同映射) 于线性叶状结构的叶状结构是拟等距的.

由此可知, 叶状结构 $\widetilde{\mathcal{L}}^c$ 是拟等距的.

结合文献 [15, 定理 4.1, 命题 2.3, 5.1 和 5.2], 可直接得出叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^{cs/cu}$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^{u/s}$ 构成 $\mathbb{R}^d$ 上的全局乘积结构. 由文献 [15] 中定理 A 的证明过程可知, 对于 $\sigma=c,cs,cu$, $H(\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma(x))=\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma(H(x))$ 对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 成立.

结合文献 [36, 命题 2.4, 推论 2.3] 的证明以及叶状结构 $\widetilde{\mathcal{L}}^c$ 的拟等距性质, 可知 H 保持叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, 且 H 限制在 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ 的每条叶片上是同胚; 集合 $H^{-1}\circ H(x)$ 是中心流形上紧的、长度一致有界的曲线. □

运用命题 A.1 和文献 [19, 引理 2.5, 推论 2.6] 的证明方法, 可以直接得到如下命题.

命题 A.2　若 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(q,f), \forall\, p,q\in\mathrm{Per}(f)$ 成立, 则 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(A), \forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$ 并且 f 是一个 Anosov 微分同胚.

下面这个命题是在文献 [37] 证明的基础上, 对当前考虑的 $f\in\mathbf{PH}_A^0$ 情形适配的结论.

命题 A.3　若 f 不是 su- 可达的, 则 $E^s\oplus E^u$ 可积.

证明　该命题的证明方法与文献 [37, 命题 5.3] 相同. 相比于本节对于 f 的假设, 文献 [37] 要求 f 是绝对部分双曲的, 以便使用文献 [35] 中的相关结论. 注意到, 文献 [37] 证明的关键点在于引用的文献 [35] 中的性质, 而在 $\mathbf{PH}_A^0$ 中的映射 f 同样具备这些性质 (参见文献 [15]).

• 文献 [35, 命题 2.3] 断言对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $y\in\widetilde{\mathcal{F}}^s(x)$, 当 $d(x,y)\to+\infty$ 时, $\frac{x-y}{d(x,y)}\to\tilde{L}^s(0)$ 一致收敛. 由文献 [15, 命题 7.2] 的证明可知, 这条性质对于 $f\in\mathbf{PH}_A^0$ 同样成立.

• 文献 [35, 命题 2.7] 断言对于任意两点 $x,y\in\mathbb{R}^d$, 流形 $\widetilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ 与 $\widetilde{\mathcal{F}}^u(y)$ 至多有一个交点. 当 $f\in\mathbf{PH}_A^0$ 时, 这条性质由命题 A.1(2) 给出.

• 上述两条蕴涵文献 [35, 命题 2.8–2.10 和 2.15(5)] 所述性质在 $f\in\mathbf{PH}_A^0$ 时也成立, 即对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 集合 $W^{su}(x):=\bigcup_{y\in\widetilde{\mathcal{F}}^u(x)}\widetilde{\mathcal{F}}^s(y)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个完备的、正则嵌入的拓扑超平面, 且与任意中心流形 $\widetilde{\mathcal{F}}^c(z)$ 交且仅交于一点, 并满足对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $y\in W^{su}(x)$, 当 $d(x,y)\to+\infty$ 时,

$$\frac{x-y}{d(x,y)}\to\tilde{L}^{su}(0)$$

一致收敛.

• 文献 [35, 定理 1.2] 断言 f 与 A 之间存在中心流形的叶共轭, 即存在同胚 $h_c:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$, 使得对于任意 $x\in\mathbb{T}^d$ 有 $h(\mathcal{F}^c(x))=\mathcal{L}^c(h(x))$ 且 $h\circ f(\mathcal{F}^c(x))=A\circ h(\mathcal{F}^c(x))$ 成立. 这一性质对于 $f\in\mathbf{PH}_A^0$ 的情形由文献 [15, 定理 B] 直接给出.

运用文献 [37, 命题 5.3] 的方法, 前述 4 条性质足以证明本命题成立. □

结合命题 A.2 和 A.3 以及文献 [26, 命题 2.3] 和 [25, 引理 5] 的证明可以得到如下结论.

命题 A.4 若 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(A), \forall\, p\in \mathrm{Per}(f)$, 则 $E^s\oplus E^u$ 可积.

证明 由命题 A.2 知 f 是 Anosov 微分同胚, 因此可以对 f 使用 Livschitz 定理, 从而用文献 [22,25] 中的方法得出 $H:\widetilde{\mathcal{F}}^c(x)\to\widetilde{\mathcal{L}}^c(H(x))$ 是 C^1- 光滑的. 再由文献 [26, 命题 2.3] 可知,

$$H(\widetilde{\mathcal{F}}^u(x))=\widetilde{\mathcal{L}}^u(H(x)).$$

注意到, 双曲微分同胚之间的共轭 H 保持稳定流形, 即

$$H(\widetilde{\mathcal{F}}^s(x))=\widetilde{\mathcal{L}}^s(H(x)).$$

由 H 保持 $\widetilde{\mathcal{F}}^{s/u}$ 易知, f 不是 su- 可达的. 因此由命题 A.3 可得 $E^s\oplus E^u$ 可积.

命题 A.4 也可以使用文献 [19, 命题 3.3] 的方法证明. □

由文献 [37, 引理 5.5, 命题 5.6, 定理 6.1] 和 [19, 引理 2.3, 断言4.2] 的证明可以得到如下命题. 注意到, 文献 [37] 中所需要的全局乘积结构及 $\widetilde{\mathcal{F}}^c$ 的拟等距性质已经由命题 A.1 给出, 文献 [19, 断言 4.2] 证明中所需要的丢番图 (Diophantine) 逼近性质由文献 [11, 第 V 章, 定理 III 和 VI] 给出.

命题 A.5 假设 $E^s\oplus E^u$ 可积, 则以下 4 条性质成立.

(1) 半共轭 H 是一个同胚, 此时 H 是一个共轭. 特别地, h 是 f 与 A 之间的拓扑共轭.

(2) 共轭 H 保持所有叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma$ $(\sigma=s,c,u,cs,cu,su)$, 即 $H(\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma(x))=\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma(H(x))$.

(3) 共轭 H^{-1} 沿着双曲流形是一致 Hölder 连续的, 即存在常数 $C>0$ 和 $0<\beta<1$, 使得对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma(x)$ $(\sigma=s,u)$ 有

$$d_{\widetilde{\mathcal{F}}^\sigma}(H^{-1}(x),H^{-1}(y))\leqslant C\cdot d_{\widetilde{\mathcal{L}}^\sigma}(x,y)^\beta.$$

(4) 存在常数 $C>0$ 和 $0<\theta<1$, 使得对于任意 $\eta>0$ 和 $p,q\in\mathbb{T}^d$, 存在点 $x\in\mathcal{F}^u(p)\cap\mathcal{F}^{cs}(q)$ 和 $y\in\mathcal{F}^s(x)\cap\mathcal{F}^c(q)$ 使得

$$d_{\mathcal{F}^c}(y,q)\leqslant\eta,\quad \text{且}\quad d_{\mathcal{F}^s}(x,y)\leqslant C\cdot d_{\mathcal{F}^u}(x,p)^{-\theta}.$$

下面这个命题是文献 [19, 命题 4.1] 适配于当前情形的结论. 这是本文所述的联合可积刚性现象的一个核心观察, 其证明方法也适用于相关研究.

命题 A.6 若 $E^s\oplus E^u$ 可积, 则 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(q,f), \forall\, p,q\in\mathrm{Per}(f)$.

证明 该命题的证明与文献 [19, 命题 4.1] 的类似, 这里只给出证明的关键步骤. 由命题 A.5 可知, 此时存在 f 与 A 之间的拓扑共轭 $h:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 保持所有叶状结构. 下面采用反证法. 假设存在 $p_1,p_2\in\mathrm{Per}(f)$ 使得它们的中心 Lyapunov 指数不相等. 因此

$$\lambda_-:=\inf\overline{\{\lambda^c(p,f)\mid p\in\mathrm{Per}(f)\}}<\sup\overline{\{\lambda^c(p,f)\mid p\in\mathrm{Per}(f)\}}=:\lambda_+.$$

进一步地, 有下列 5 条性质成立.

(1) $\lambda^c(p,f)\geqslant 0, \forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$. 这是由于假设 $\lambda^c(A)>0$ 以及 h 保持中心稳定流形, 故 f 限制在中心流形上是拓扑扩张的.

(2) 对于任意 $\delta>0$ (待定), 存在周期点 $p,q\in\mathrm{Per}(f)$ 使得

$$\lambda^c(p,f)-\lambda_-\leqslant\log(1+\delta),\quad \lambda_+-\lambda^c(q,f)\leqslant\log(1+\delta).$$

不失一般性, 可以假设 p 和 q 均为 f 的不动点, 并且取 δ 充分小, 使得 $\lambda^c(p,f)<\lambda^c(q,f)$.

(3) 对于前述常数 $\delta > 0$, 存在 Riemann 度量使得

$$\lambda_- - \log(1+\delta) \leqslant \log\|Df|_{E^c(x)}\| \leqslant \lambda_+ + \log(1+\delta), \quad \forall x \in \mathbb{T}^d.$$

这是由于 h 是共轭, 因此 f 满足跟踪引理, 从而利用周期点逼近的方式可以得到上述的度量.

(4) 对于前述常数 $\delta > 0$, 存在常数 $\eta_0 > 0$, 使得对于任意 $z_1, z_2 \in \mathbb{T}^d$, 只要 $d(z_1, z_2) \leqslant 3\eta_0$, 就有

$$|\log\|Df|_{E^c(z_1)}\| - \log\|Df|_{E^c(z_2)}\|| < \log(1+\delta).$$

(5) 对于前述常数 $\eta_0 > 0$, 存在常数 $0 < \eta_2 < \eta_1 < \eta_0$, 使得对于 $\mathcal{F}^c$ 叶片上的任意曲线 J,

- 若其长度满足 $|J| \leqslant \eta_1$, 则 $|f^{-n}(J)| \leqslant \eta_0, \forall n \geqslant 0$;
- 若其长度满足 $|J| \leqslant \eta_2$, 则 $|J'| \leqslant \eta_1$,

其中 $J' = \mathrm{Hol}^{su}(J)$, 这里 Hol^{su} 是由叶状结构 $\mathcal{F}^{su}$ 诱导的、作用于叶状结构 $\mathcal{F}^c$ 的叶片的和乐映射. 上述两个不等式可由 A 在 $\mathcal{L}^c$ 上的扩张性以及一致连续的共轭 h 保持所有叶状结构得到.

固定上述的常数 δ, η_0, η_1 和 η_2, 我们可以取出下列参数与曲线.

- 常数 D 足够大, 满足命题 A.5(4), 即存在 $C, \theta > 0$, $x \in \mathcal{F}^u(p) \cap \mathcal{F}^{cs}(q)$, $y \in \mathcal{F}^s(x) \cap \mathcal{F}^c(q)$ 使得

$$d_{\mathcal{F}^c}(y,q) \leqslant \eta_1, \quad d_{\mathcal{F}^u}(p,x) = D, \quad 且 \quad d_{\mathcal{F}^s}(x,y) \leqslant C \cdot D^{-\theta} \ll \eta_0.$$

- 记 $J^s(x,y)$ 为 $\mathcal{F}^s(x)$ 上连接 x 和 y 的测地线, 记 $J^c(y,q)$ 为 $\mathcal{F}^c(q)$ 上连接 y 和 q 的曲线.
- 曲线 $J_0 \subset \mathcal{F}^c(p)$ 使得 $|J_0| = \eta_2$, 且 p 是 J_0 的端点.
- 曲线 $J_1 = \mathrm{Hol}^{su}(J_0)$ 使得 x 为 J_1 的端点. 注意, 由前述性质 (5) 可知 $|J_1| \leqslant \eta_1$.

对于前面所取的常数与曲线, 考虑如下两个时刻.

- $N_0 \in \mathbb{N}$: 最小正整数使得 $d_{\mathcal{F}^u}(p, f^{-n}(x)) \leqslant 1$. 计算可得

$$N_0 \leqslant \frac{\log D}{-\mu} + 1, \quad 其中\ \mu = \sup_{x\in\mathbb{T}^d} \log\|Df^{-1}|_{E^u(x)}\| < 0.$$

- $N_1 \in \mathbb{N}$: 最大正整数使得 $|f^{-n}(J^s(x,y))| \leqslant \eta_0$. 计算可得

$$N_1 \geqslant \frac{\theta\log D + \log\eta_0 - \log C}{\gamma}, \quad 其中\ \gamma = \sup_{x\in\mathbb{T}^d} \log\|Df^{-1}|_{E^s(x)}\| > 0.$$

不妨假设 $N_0 \geqslant N_1$. 取 $\beta = \frac{-\theta\mu}{2\gamma}$, 我们可以固定两个常数:

- $D_0 > 0$ 充分大, 使得当 $D \geqslant D_0$ 时, $N_1 > \beta N_0$;
- $\delta > 0$ 充分小, 使得 $\log(1+\delta) < \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{[\frac{5}{\beta}]+1}$.

由此, 可以通过如下方法计算出 $\frac{|f^{-N_0}(J_1)|}{f^{-N_0}J_0}$ 具有指数级的误差.

- 由性质 (5) 以及 N_1 的定义不难得到, 对于任意 $z \in J_1$ 与 $k \in [0, N_1]$, 有 $d(f^{-k}(z), f^{-k}(q)) \leqslant 3\eta_0$. 结合性质 (4) 可得

$$|f^{-N_1}(J_1)| \leqslant (1+\delta)^{2N_1} \mathrm{e}^{-N_1\lambda_+} |J_1|.$$

再运用性质 (3), 可以计算得

$$|f^{-N_0}(J_1)| \leqslant (1+\delta)^{2N_0} \mathrm{e}^{-N_1\lambda_+} \mathrm{e}^{(N_1-N_0)\lambda_-} |J_1|. \tag{A.1}$$

- 由性质 (3) 可以直接计算得到

$$|f^{-N_0}(J_0)| \geqslant (1+\delta)^{-2N_0} \mathrm{e}^{-N_0\lambda_-} |J_0|. \tag{A.2}$$

令 $D\to+\infty$, 则有 $N_0\to+\infty$, 结合 $N_1>\beta N_0$ 与不等式 (A.1) 和 (A.2), 可得

$$\frac{|f^{-N_0}(J_1)|}{|f^{-N_0}(J_0)|}<(1+\delta)^{-N_0}\cdot\frac{\eta_1}{\eta_2}\to 0,\quad \text{当 } D\to+\infty \text{ 时}. \tag{A.3}$$

由 N_0 的取法, 可得 $d_{\mathcal{F}^u}(p,f^{-n}(x))\leqslant 1$. 故极限式 (A.3) 与从 $f^{-N_0}(J_1)$ 到 $f^{-N_0}(J_0)$ 的、限制于 $\mathcal{F}^{cu}(p)$ 上的、由 $\mathcal{F}^u$ 诱导的和乐映射的 C^1- 光滑性 [58] 矛盾. □

最后, 定理 2.4 的证明可以由如下论断完成.

定理 2.4 的证明 由命题 A.2 和 A.4 可知, $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(A),\forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$, 则 $E^s\oplus E^u$ 可积且 f 是一个 Anosov 微分同胚.

由命题 A.6 和 A.2 可知, 如果 $E^s\oplus E^u$ 可积, 则 $\lambda^c(p,f)=\lambda^c(A),\forall\, p\in\mathrm{Per}(f)$ 且 f 是一个 Anosov 微分同胚.

我们采用反证法证明 f 是遍历的. 如果 f 不遍历, 则 f 不是 su- 可达的 (参见文献 [63]). 因此, 结合命题 A.3、A.6 和 A.2 可知 f 是一个 Anosov 微分同胚. 注意到 $C^{1+\alpha}$- 光滑的、保体积的 Anosov 微分同胚总是遍历的 (参见文献 [2]). 至此完成了定理 2.4 的证明. □

Rigidity on integrability of invariant bundles of Anosov maps

Ruihao Gu & Yi Shi

Abstract In this short survey, we summarize the authors' works about rigidity on integrability of invariant subbundles for Anosov maps and the maps in their homotopic classes. For Anosov diffeomorphisms, we give the equivalent relationship between the joint integrability of strong bundles and the spectral rigidity of center bundles. Based on the previous works, we also prove in the present paper that for a partially hyperbolic diffeomorphism with the one-dimensional center bundle which is homotopic to an Anosov diffeomorphism by a path in the set of partially hyperbolic diffeomorphisms, its stable bundle and unstable bundle are jointly integrable if and only if the center Lyapunov exponents of its periodic points are equal to one of its linearizations. For non-invertible Anosov maps, we build a connection among the integrability of unstable bundles, the rigidity of Lyapunov exponents on the stable bundles, and the existence of topological conjugacy. We also completely classify the conjugacy classes of non-invertible Anosov maps on the torus. Some rigidity issues on the existence of semi-conjugacy are also considered.

Keywords uniform hyperbolicity, partial hyperbolicity, Lyapunov exponents, integrability, rigidity

MSC(2020) 37C05, 37C15, 37D20

doi: 10.1360/SSM-2024-0307